

## Evidenciação de estruturas em imagens por meio de equação de difusão

### Enhancement of structures in images through diffusion equation

André Persechino

*Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - Coordenação de Atividades Técnicas,  
Rua Dr. Xavier Sigaud 150, Rio de Janeiro, RJ. CEP: 22290-180. Brasil*

J. A. Apolinário Jr.

*Instituto Militar de Engenharia - Departamento de Engenharia Elétrica,  
Pça. Gal. Tibúrico, 80, Rio de Janeiro, RJ. CEP: 22290-270. Brasil*

Márcio P. Albuquerque

*Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - Coordenação de Atividades Técnicas,  
Rua Dr. Xavier Sigaud 150, Rio de Janeiro,  
RJ. CEP: 22290-180. Brasil*

*Submetido em 13/08/2014*

**Resumo:** É apresentada neste trabalho uma visão geral sobre o processamento não-linear de sinais com base na equação de difusão de Perona-Malik. Os aspectos básicos da teoria são apresentados em detalhes e a versão discreta – apropriada para implementação computacional – é deduzida. Como aplicação, a técnica discutida é empregada em reconstrução de um sinal digital. Uma comparação com métodos usuais foi feita, mostrando as conveniências e particularidades da técnica de filtragem por equação de difusão. Também apresentamos uma aplicação da técnica no realce em imagens mamográficas, mostrando sua utilidade em detecção de (micro) estruturas que podem estar correlacionadas com achados radiológicos relevantes, tais como calcificações.

**Palavras-chave:** Filtragem não-linear; Equação de Perona-Malik; Enhancement de imagens; Mamografia.

**Abstract:** It is presented in this work an overview on nonlinear signal processing based on the Perona-Malik diffusion equation. The basic aspects of the theory are covered in detail and the discrete version – appropriated for computational purposes – is derived. As an application, the studied technique is employed in the reconstruction of a digital signal. A comparison between this technique and usual methods was carried out, pointing out conveniences and particularities of diffusion equation filtering. Also, we present an application of the technique in the enhancement of (micro) structures in mammographic images, whose presence can be related with relevant radiological findings, such as calcifications.

**Keywords:** Nonlinear filtering; Perona-Malik equation; Image enhancement, Mammography.

### 1. INTRODUÇÃO

Em processamento de sinais, lidamos frequentemente com recuperação e extração de informação. Essa tarefa guarda certa subjetividade, pois depende fortemente da natureza da informação a ser extraída e do sinal a ser processado. Em adição, há a questão dos ruídos: o fato de lidarmos com um sinal corrompido dificulta necessariamente qualquer abordagem para extração de informações do sinal original. As fontes de ruído são diversas, indo desde ruído eletrônico até problemas de amostragem e quantização, por exemplo. Um caso de um trem de pulsos corrompido por ruído branco gaussiano aditivo pode ser visto na Figura 1.

Dentro desse contexto de recuperação de informação sobre um sinal ruidoso, faz-se necessário o emprego de técnicas de filtragem de sinais, para que estes possam ser recuperados tanto quanto possível ou que permitam a extração dos atributos desejados com o mínimo erro. Este trabalho tem por finalidade desenvolver um estudo sobre uma classe particular de processamento de sinais chamada processamento via equação de difusão. Essa classe de técnicas trabalha com

analogias entre o sinal sob análise e sistemas físicos submetidos a processos de difusão, isto é, um sistema físico cuja evolução temporal é governada por uma Equação Diferencial Parcial (EDP) semelhante à equação do calor [1]. Este tema ganhou atenção da comunidade científica após o trabalho de Perona e Malik [2], em que os autores propuseram um modelo de difusão anisotrópica para detecção eficiente de bordas em imagens.

O objetivo central deste trabalho é apresentar os fundamentos teóricos de filtragem via equação de difusão (linear e não-linear) e exemplificar as técnicas com exemplos e possíveis aplicações em reconstrução de sinais digitais e *enhancement*<sup>1</sup> de imagens mamográficas. O leitor interessado na aplicação das técnicas estudadas sobre imagens pode buscar aprofundamento nas referências [2–5]. Para uma visão aprofundada sobre os aspectos matemáticos da difusão não-

<sup>1</sup> *Enhancement* pode ser entendido como sendo o processo de melhoria de algum aspecto particular da imagem.

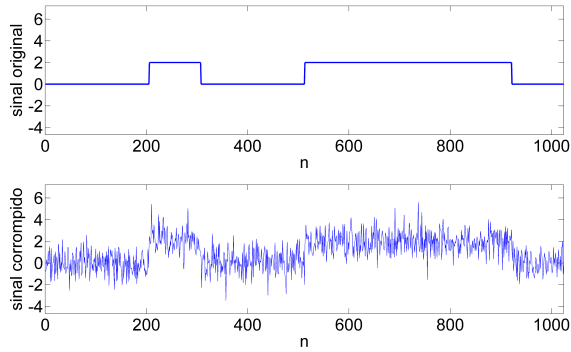


Figura 1: Trem de pulsos original (acima) e pulso corrompido por ruído branco gaussiano (abaixo) cuja SNR é igual a 3,1 dB.

linear, recomenda-se a referência [6].

O trabalho está organizado da seguinte forma:

- Seção 2 - Descrição multiescala de um sinal;
- Seção 3 - Equação de Perona-Malik;
- Seção 4 - Aplicações;
- Seção 5 - Conclusões;
- 6 - Referências.
- Apêndice A - Implementação computacional do filtro Perona-Malik.

Nas Seções 2 e 3 são apresentadas as bases conceituais da técnica de processamento por equação de difusão. A Seção 4 traz alguns exemplos da utilização das técnicas apresentadas e faz uma discussão sobre os efeitos da variação dos parâmetros do modelo estudado sobre o sinal processado. No Apêndice A é disponibilizado um código em MATLAB® com uma implementação do filtro estudado neste trabalho.

## 2. DESCRIÇÃO MULTIESCALA DE UM SINAL

Nesta seção apresentamos o conceito de descrição multiescala de um sinal e sua relação direta com uma evolução por difusão. Essa relação constitui a base teórica para a compreensão do processo de filtragem via evolução por difusão e será discutida tanto na forma contínua quanto na forma discreta, sendo esta última de especial interesse para a implementação computacional.

O sinal analisado será representado em espaço e tempo contínuos por  $u(\vec{r}, t)$ , em que  $\vec{r}$  representa a variável espacial ( $\vec{r} = (x, y)$  para uma imagem, por exemplo) e  $t$  é o que chamaremos, por conveniência, de tempo, mas que corresponde – de fato – a uma variável de escala, conforme será mostrado adiante.

Seja  $u(\vec{r}, 0)$  o sinal a ser analisado. A descrição multiescala de  $u$  consiste em obter uma família de sinais derivada do sinal original, mas com resolução mais pobre. Os sinais que compõem esta família são obtidos iterativamente por meio de alguma filtragem que simplifique a descrição do sinal cada vez mais. Ou seja, o sinal inicial  $u(\vec{r}, 0)$  é iterativamente filtrado, levando a descrições cada vez mais simplificadas, tal como esquematizado na Figura 2 e mostrado na Figura 3.

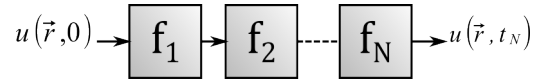


Figura 2: Filtragem sucessiva de um sinal para sua descrição multiescala.

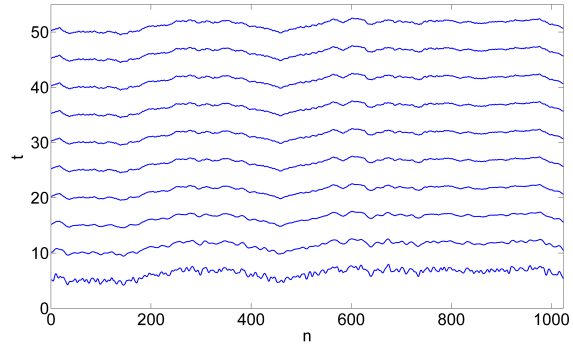


Figura 3: Descrição multiescala de um sinal 1-D: conforme a variável escala  $t$  aumenta, a resolução é diminuída. A variável  $n$  remete à  $n$ -ésima entrada do sinal.

Intuitivamente, percebemos que nenhuma informação pode ser criada antecipadamente. Isto é, qualquer particularidade notada no sinal em um determinado ponto  $(\vec{r}, t)$  está necessariamente presente em instantes anteriores de  $t$ , mas não necessariamente na mesma posição  $\vec{r}$ . Note-se que devemos esperar um deslocamento espacial do sinal ao longo da evolução, devido ao retardo de grupo [7]. É justamente esse deslocamento espacial que configura a descrição multiescala do sinal[1]: deve-se rastrear os pontos de máximo e mínimo de cada componente da família a uma dada resolução, visando caracterizar o sinal original qualitativamente. Contudo, esse rastreamento não é trivial e a caracterização do sinal original torna-se complicada. Entretanto, se as sucessivas filtrações forem executadas com um filtro passa-baixa do tipo Gaussiano com variância dependente de  $t$  na forma  $\sigma^2(t) = 2t$ , ou seja,

$$G(\vec{r}, \sigma^2(t)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\|\vec{r}\|^2}{4t}\right), \quad (1)$$

o processo de descrição multiescala mostra-se equivalente a uma evolução segundo a equação de difusão:

$$\partial_t u(\vec{r}, t) = \nabla^2 u(\vec{r}, t). \quad (2)$$

Note-se que a função difusibilidade na Equação (2) é igual à unidade. Essa equação pode ser reescrita em uma forma mais conveniente, levando-se em conta que  $\nabla^2[u] = \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla}u]$ :

$$\partial_t u(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla}u(\vec{r}, t)] \quad (3)$$

A equivalência entre as sucessivas filtrações de  $u(\vec{r}, t)$  por um filtro Gaussiano  $G(\vec{r}, \sigma^2(t))$  e a evolução via equação de difusão reside no fato que a função

$$u(\vec{r}, t) = u(\vec{r}, 0) * G(\sigma^2(t)) \quad (4)$$

é solução da equação de difusão [6, 8]. Na equação 4, o asterisco representa a operação de convolução, associada ao processo de filtragem linear entre os dois sinais em questão.

A filtragem linear segundo a Equação (4) apresenta resultados satisfatórios no que diz respeito à redução dos ruídos, mas carrega a inconveniência de suavizar bordas, tal como ilustrado na Figura 4.

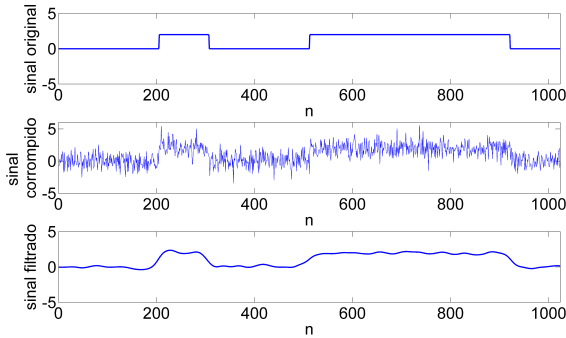


Figura 4: Sinal original (acima), corrompido com SNR igual a 3,1 dB (meio) e filtrado por passa-baixas Gaussiano (abaixo) com  $\sigma = 10$ .

Essa suavização generalizada do sinal se dá pelo fato de que um filtro da forma descrita na Equação (1) corresponde a um passa-baixa, isto é, favorece as baixas frequências em detrimento das componentes de frequências mais altas.

Uma abordagem alternativa se dá por meio da diferenciação do sinal: pontos em regiões de pouca ou nenhuma variação são suprimidos, ao passo que pontos em regiões de variação intensa são favorecidos (filtro passa-alta). Essa abordagem funciona bem desde que o sinal original predomine sobre o ruído, caso contrário os ruídos serão favorecidos. O efeito indesejado de evidenciação dos ruídos por filtragem via diferenciador pode ser visualizado na Figura 5.

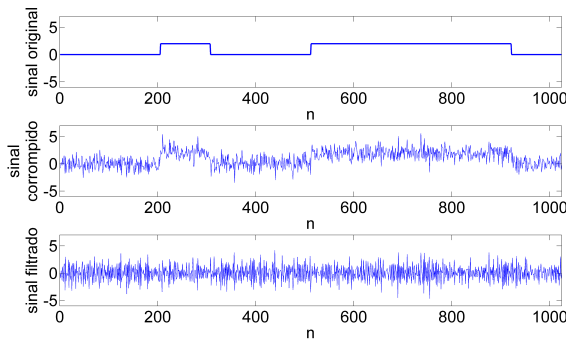


Figura 5: Sinal original (acima), corrompido (meio) com SNR igual a 3,1 dB e filtrado por diferenciador (abaixo).

Em uma primeira análise, pode parecer que a evolução por difusão de um sinal não seja útil, devido à deterioração de suas bordas e, conseqüentemente, sua desconfiguração. De fato, se o sinal for submetido a uma evolução por uma equação de difusão *linear* tal como descrita pela Equação (2), o resultado será necessariamente a suavização do sinal. Na próxima seção será mostrada uma abordagem alternativa proposta por Perona e Malik [2] que faz uso de EDPs

não-lineares para atingir uma reconstrução satisfatória do sinal original, em que bordas são favorecidas e regiões entre-bordas tendem à suavização.

### 3. EQUAÇÃO DE PERONA-MALIK

A Equação (3) é um caso particular de

$$\partial_t u(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot [c(\vec{r}, t) \vec{\nabla} u(\vec{r}, t)] \quad (5)$$

em que  $c(\vec{r}, t)$  é a função difusibilidade. Conforme dito antes, na Equação 3,  $c(\vec{r}, t) = 1$ .

A função difusibilidade  $c(\vec{r}, t)$  corresponde claramente ao termo que controla a evolução. De acordo com as discussões anteriores, podemos intuir que se  $c = \text{constante}$ , a difusão levará a uma homogeneização do sinal, o que é obviamente indesejável. Contudo, não existe *a priori* restrição alguma sobre  $c(\vec{r}, t)$ . Esse é o ponto proposto por Perona e Malik [2], a ser descrito a seguir.

A função  $c(\vec{r}, t)$  deve ser tal que evolua o sinal de acordo com os seguintes requisitos:

- Nas regiões entre-bordas, a evolução deve levar à homogeneização;
- Nas regiões de borda, a evolução deve ocorrer de modo a ressaltar, ou pelo menos conservar estas estruturas.

Uma função que opera basicamente estes dois requisitos é o módulo do gradiente do sinal processado,  $\|\vec{\nabla} u\|$ . Logo, a função difusibilidade deve ser da forma  $c(\vec{r}, t) = f(\|\vec{\nabla} u\|, t)$ . Com isso, chega-se à chamada Equação de Perona-Malik [2, 3]:

$$\partial_t u = \vec{\nabla} \cdot \left( f(\|\vec{\nabla} u\|) \vec{\nabla} u \right). \quad (6)$$

De acordo com o que foi discutido, duas informações básicas que qualificam a função  $f(\|\vec{\nabla} u\|)$  são naturalmente evidenciadas:

- $f(0) = 1$ ;
- $\|\vec{\nabla} u\| \rightarrow +\infty \Rightarrow f(\|\vec{\nabla} u\|) \rightarrow 0$ .

Ou seja, em pontos de maior uniformidade, a difusão ocorre visando a suavização da região, ao passo que em pontos cujo  $\|\vec{\nabla} u\|$  é acentuado, a difusão é enfraquecida. Uma visão qualitativa de uma função que atenda estes dois requisitos pode ser vista na Figura 6.

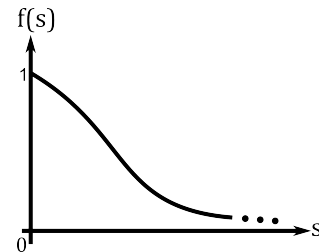


Figura 6: Curva qualitativa para uma função difusibilidade no modelo de Perona-Malik.

Antes de iniciarmos a discussão sobre a discretização da Equação (6), consideremos seu caso unidimensional  $(x, t)$ :

$$\partial_t u = \partial_x [f(\partial_x u) \partial_x u]. \quad (7)$$

A função  $F(\partial_x u) = f(\partial_x u) \partial_x u$  é chamada fluxo [2]. Uma visão qualitativa de um perfil possível para o fluxo é mostrada na Figura 7. Verifica-se [2, 6] que há um máximo para  $\|\vec{\nabla} u\| = K$  que pode ser interpretado, grosso modo, como um limiar que separa pontos de difusão intensa ou suprimida.

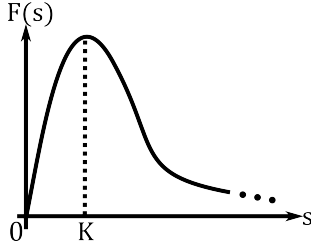


Figura 7: Curva qualitativa para uma função fluxo no modelo de Perona-Malik. Para valores abaixo de  $K$ , a difusão ocorre de maneira semelhante ao caso linear; ao passo que para valores maiores que  $K$  a difusão é enfraquecida.

### 3.1. Discretização e implementação da Equação de Perona-Malik

Todo o desenvolvimento anterior se deu para funções de domínio e tempo (escala) contínuos. Visando a implementação computacional da filtragem não-linear proposta por Perona e Malik, um esquema em espaço e tempo discretos deve ser elaborado. O ponto de partida para o caso 1-D é a Equação (7) escrita em termos do fluxo  $F$ :

$$\partial_t u = \partial_x [F(\partial_x u)]. \quad (8)$$

Supondo que o sinal  $u(x, t)$  seja discretizado espacialmente em  $N$  entradas, as derivadas espaciais podem ser aproximadas via diferenças finitas. Assim, temos:

$$\partial_t u_n = F(u'_{n+1} - u'_n) - F(u'_n - u'_{n-1}); \quad \text{com } n = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

O índice superior indica o instante de tempo avaliado.

A discretização da variável  $t$  é imediata, e a Equação (9) torna-se completamente discretizada permitindo sua resolução pelo método de Euler:

$$u_n^{t+1} = u_n^t + \Delta t (F(u'_{n+1} - u'_n) - F(u'_n - u'_{n-1})). \quad (10)$$

O desenvolvimento para 2-D (imagens) demanda apenas o ajuste das diferenças, de forma que sejam calculadas sobre uma vizinhança de pixels. A dedução a seguir adota o caso de 4 vizinhos (vizinhança  $N_4$ ), tal como representada na Figura 8.

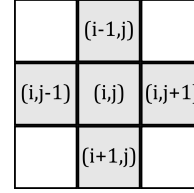


Figura 8: Vizinhança  $N_4$  para o pixel na posição  $(i, j)$ .

Uma adaptação simples para um sinal discreto bidimensional consiste em aproximar as derivadas direcionais na forma:

$$\begin{aligned} D_1^t(i, j) &= u^t(i+1, j) - u^t(i, j), \\ D_2^t(i, j) &= u^t(i, j) - u^t(i-1, j), \\ D_3^t(i, j) &= u^t(i, j+1) - u^t(i, j), \text{ e} \\ D_4^t(i, j) &= u^t(i, j) - u^t(i, j-1). \end{aligned} \quad (11)$$

Novamente, os índices superiores correspondem ao instante de tempo avaliado. Com as aproximações apresentadas na Equação (11), estendemos a Equação (10) para

$$u(i, j)^{t+1} = u(i, j)^t + \Delta t \cdot [F(D_1^t) - F(D_2^t) + F(D_3^t) - F(D_4^t)]. \quad (12)$$

Na Equação (12),  $F$  é a função fluxo, cujos argumentos são as diferenças dadas pela Equação (11).

A Equação (12) mostra a versão bidimensional e discreta da equação de Perona-Malik, proporcionando meios de implementação computacional. Naturalmente, ela deve ser adaptada conforme a vizinhança seja alterada.

Antes de iniciar as aplicações de fato, convém notar que existe uma liberdade de escolha quanto à função fluxo descrita na Equação (8). No trabalho de Perona e Malik [2] são usadas duas funções difusibilidade:

$$f(\|\vec{\nabla} u\|) = \exp\left(-\left(\frac{\|\vec{\nabla} u\|}{K}\right)^2\right) \text{ e} \quad (13)$$

$$f(\|\vec{\nabla} u\|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\|\vec{\nabla} u\|}{K}\right)^2}. \quad (14)$$

A escolha da função difusibilidade (e portanto da função fluxo) é livre, e em função disso, demanda uma análise sobre quais características do sinal pretende-se ressaltar e quais deseja-se suprimir. Um exemplo de função fluxo descontínua, que proporciona a fusão de regiões em sinais – permitindo sua segmentação – é apresentada no trabalho de Pollak *et al.* [4]. Por fim, deve-se atentar à escolha de  $K$  nas Equações (13) e (14). Na Seção 4 serão feitas breves considerações sobre a influência deste parâmetro.

## 4. APLICAÇÕES

Apresentados os conceitos teóricos fundamentais e a discretização do processo de filtragem por equação de difusão,

serão apresentadas algumas aplicações da técnica discutida. Serão apresentadas duas aplicações: a reconstrução de um sinal digital simples, tal como mostrado na Figura 1; e o processamento de imagens mamográficas com vistas à evidência de estruturas suspeitas.

#### 4.1. Reconstrução de sinais digitais

Nesta aplicação, baseada nos experimentos descritos em [4], pretende-se reconstruir um trem de pulsos digitais corrompido por ruído branco gaussiano aditivo de média nula. Um sinal sintético  $u^0$  antes e após a adição de ruído pode ser visualizado na Figura 9.

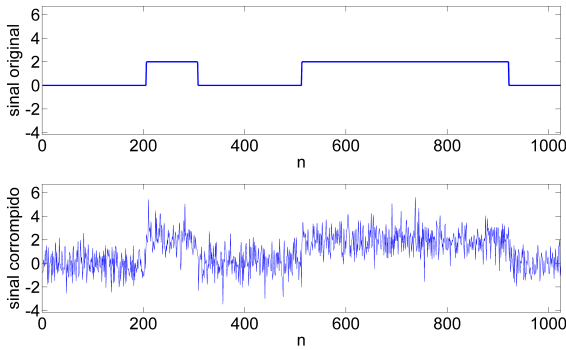


Figura 9: Sinal sintético original (acima) e corrompido por ruído (abaixo) cuja SNR é igual a 3,1 dB.

Para processamento do sinal mostrado na Figura 9, usaremos a força de difusibilidade dada pela Equação (13). Há dois parâmetros que devem ser levados em conta:

- O valor do parâmetro  $K$ ;
- O número de iterações  $I$ .

Quanto à escolha de  $K$ , não há um método ou indicativo óbvio que indique o valor a ser usado. No trabalho de Perona e Malik [2] é usado o *estimador de ruído de Canny*, que consiste em calcular  $K$  como sendo uma grandeza dependente do histograma do gradiente da imagem a cada passo de iteração ( $K$  dinâmico). Contudo, a forma com que  $K$  é obtido ainda permanece em aberto, mas há algumas considerações simples que podem ajudar no estabelecimento deste valor: devemos ter em mente que  $K$  é um limiar que separa a difusão linear da amortecida. Logo, se  $K$  tender a zero, a difusão ocorrerá no sentido de preservar as descontinuidades, mas sem suprimir regiões externas a estas, não proporcionando assim mudanças significativas em relação ao sinal original. Por outro lado, valores muito altos de  $K$  farão com que a difusão ocorra análoga à linear, levando à homogeneização do sinal. Nesse sentido, surge naturalmente uma primeira restrição sobre  $K$ :

$$\min \{u^l\} \leq K \leq \max \{u^l\}. \quad (15)$$

O que a Equação (15) mostra é que, basicamente, devemos escolher  $K$  dentro da escala dinâmica do sinal para que sejam obtidas mudanças significativas no sinal sem, no entanto, degradá-lo.

No que diz respeito ao número de iterações (em domínio contínuo: o tempo/escala em que o sistema é deixado a difundir), também não há um critério de parada óbvio. Contudo, deve-se levar em conta que processos de difusão muito longos geram resultados de suavização extrema do sinal.

Em síntese, podemos dizer que o valor de limiar  $K$  e o número de iterações  $I$  são parâmetros do método e devem ser analisados previamente. No trabalho de Tsiotsios e Petrou [9] são feitas análises e comparações entre diversos métodos de determinação automática destes parâmetros. Pelo fato de constituir um trabalho à parte, uma discussão deste tipo não será feita neste trabalho. Adicionalmente, uma outra referência que trata da influência dos parâmetros sobre a difusão é o trabalho de Benhamoua [10].

Na Figura 10 pode ser visto o resultado da filtragem não-linear sobre o sinal original corrompido. O valor de  $K$  usado foi 9,1 e foram realizadas 500 iterações.

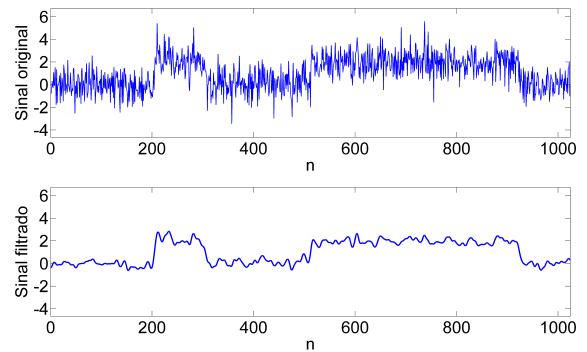


Figura 10: Sinal corrompido (acima) com SNR igual a 3,1 dB e filtrado com  $K=9,1$  e  $I=500$  (abaixo)

Embora ainda apresente ruídos, o sinal filtrado mostrado na Figura 10 pode ser efetivamente recuperado, caso submetido a uma operação simples de *limiarização*[11], bastante usual em processamento de imagens. Para tanto, basta observar o histograma do sinal filtrado é efetivamente *bimodal* (vide Figura 11), o que permite interpretar o sinal como composto apenas de duas classes. O sinal reconstruído por ser visto na Figura 12.

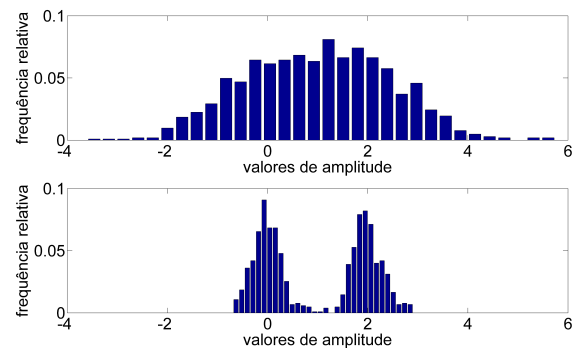


Figura 11: Histogramas dos sinais original corrompido (acima) e filtrado (abaixo)

Para finalizar a discussão sobre reconstrução de sinais digitais, convém evidenciar que a função fluxo descontínua proposta por Pollak *et al.* [4] possui uma característica de

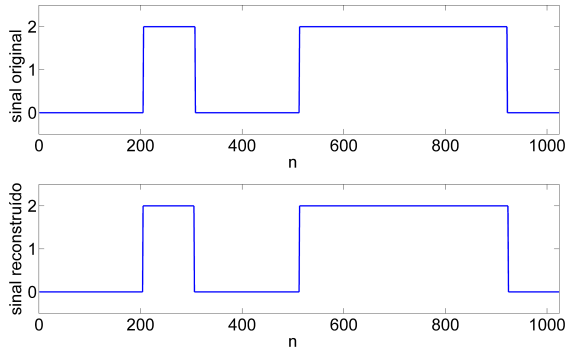


Figura 12: Sinais original sem ruído (acima) e reconstruído após filtragem não-linear e limiarização (abaixo).

agregação que por si só já agrupa elementos do sinal em classes, não exigindo uma operação de limiarização tal como exemplificada neste trabalho.

#### 4.2. Enhancement de imagens mamográficas

Como aplicação em imagens da técnica de filtragem não-linear discutida neste trabalho, apresentaremos um procedimento de enhancement de imagens mamográficas.

A principal motivação para melhorarmos uma imagem mamográfica reside no fato que esta possui intrinsecamente baixo contraste e dentre os principais achados radiológicos que estão associados ao câncer de mama, há as calcificações, que são estruturas de difícil detecção. Dessa forma, é interessante para o profissional de saúde envolvido que quaisquer estruturas espacialmente compatíveis com calcificações sejam evidenciadas na imagem original.

Um exemplo de amostra de imagem mamográfica que contém regiões com calcificações pode ser vista na Figura 13. Na Figura 14 pode ser visualizado o resultado da filtragem por difusão não-linear sobre a imagem original da Figura 13. A difusibilidade usada é a apresentada na Equação (13), o valor de  $K$  é tomado como  $(\max(u^0) - \min(u^0))/25 = 0,04$  e o número de iterações  $I$  é igual a 80.

Na Figura 15 pode ser visualizada uma evolução da imagem original da Figura 13 segundo difusão linear, após 80 iterações. Nota-se nesse caso que há uma suavização generalizada da imagem, indo na contra-mão do esperado.

Na Figura 16 pode ser visualizada uma amostra de imagem que contém calcificações esparsas. Na Figura 17 pode ser visualizado o resultado da filtragem não linear sobre a original da Figura 16, com  $K = (\max(u^0) - \min(u^0))/30 = 0,03$  e  $I = 200$ .

Por meio das Figuras 14 e 17, a seletividade da difusão pelo modelo de Perona-Malik torna-se evidente: as regiões mais uniformes sofrem suavização ao passo que as regiões de maior variação são intensificadas. Dentro do contexto de imagens mamográficas, este é um recurso poderoso, em virtude da necessidade de se detectar (micro) estruturas esparsas ou aglomeradas em meio a regiões de pouca variação de contraste, de um ponto de vista global.

Naturalmente, um método de *enhancement* não forma juízo sobre a natureza da estrutura destacada na imagem, ca-

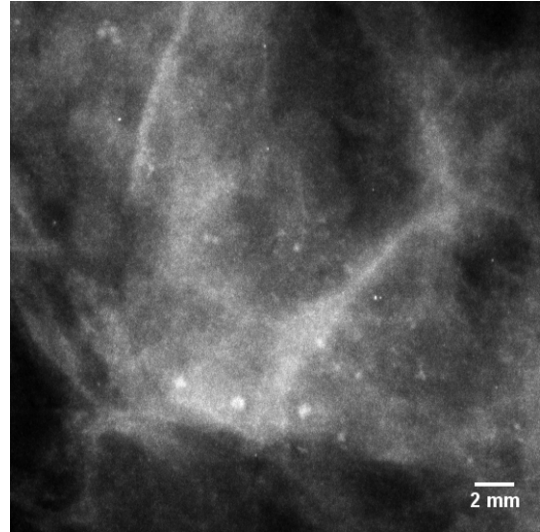


Figura 13: Exemplo de região de uma mama que possui agrupamento de calcificações.

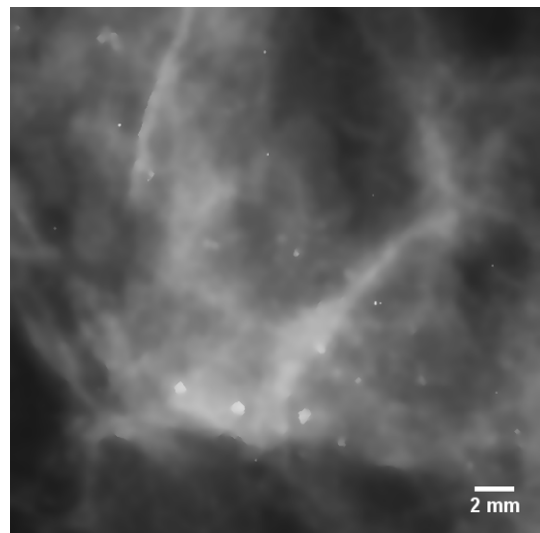


Figura 14: Exemplo de região de uma mama que possui agrupamento de calcificações submetida à difusão não-linear de Perona-Malik, com  $K=0,04$  e  $I = 80$ .

bendo análise posterior do usuário. Um exemplo desse fato e que representa uma dificuldade na área de processamento de imagens mamográficas é a presença de artefatos que podem - em uma análise superficial - ser confundidos com achados reais, mas que não passam realmente de ruído.

Um exemplo de ruído em mamogramas que pode constituir fonte de erro pode ser visualizado na Figura 18: o próprio sistema de digitalização corrompe a imagem, arranhando a matriz a ser digitalizada e causando os desgastes visíveis na região direita da imagem. O processamento dessa imagem irá ressaltar as estruturas, mesmo que não constituam achados reais. O resultado da filtragem da imagem retratada na Figura 18 com  $K = 0,03$  e após 200 iterações pode ser visto na Figura 19 (para melhor visibilidade, as duas imagens - original e filtrada - foram submetidas a um alargamento linear de contraste).

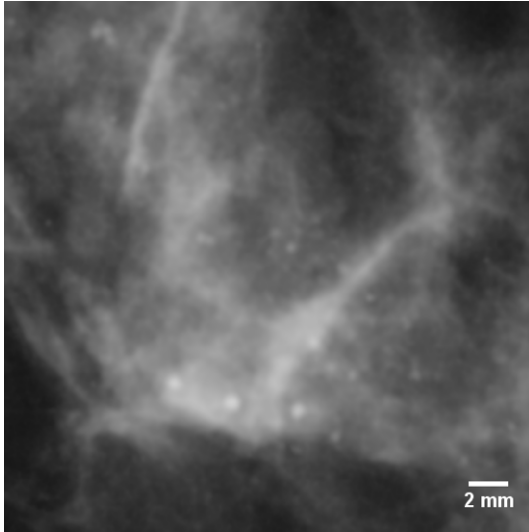


Figura 15: Exemplo de região de uma mama que possui agrupamento de calcificações submetida à difusão linear.

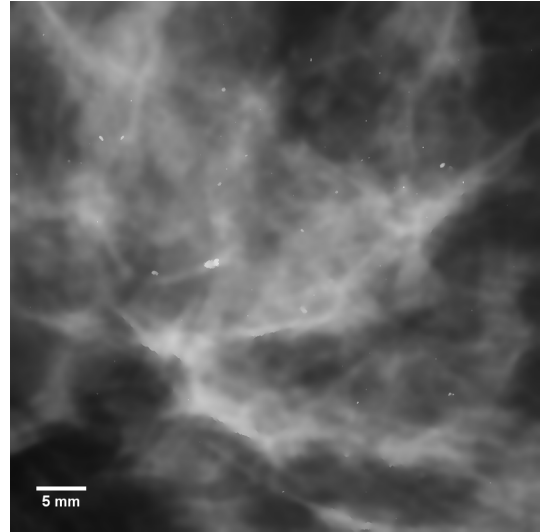


Figura 17: Exemplo de região de uma mama que possui um conjunto de calcificações esparsas submetida ao processo de filtragem não-linear de Perona-Malik, com  $K = 0,03$  e  $I = 200$ .

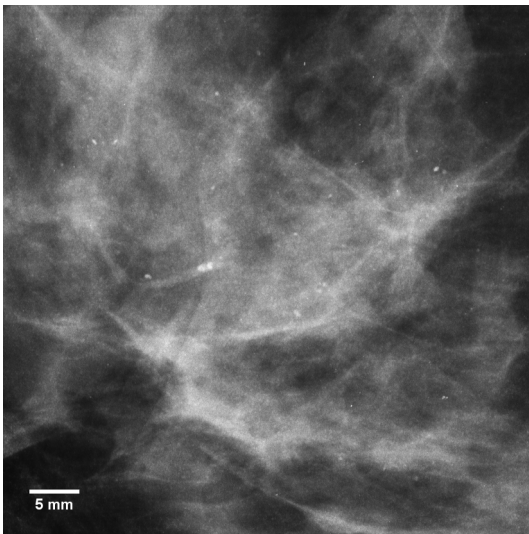


Figura 16: Exemplo de região de uma mama que possui um conjunto de calcificações esparsas.

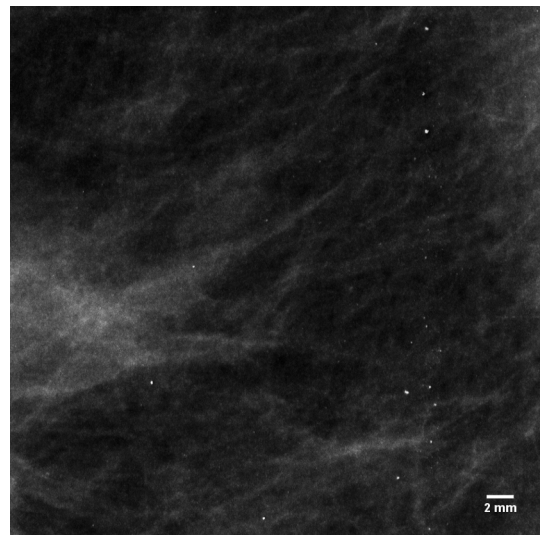


Figura 18: Exemplo de região em mamograma corrompido por ruído oriundo do sistema de digitalização. Para melhor visibilidade, a imagem foi submetida a um alargamento linear de contraste.

## 5. CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi realizar uma estudo acerca da técnica de filtragem por equação de difusão não-linear proposta originalmente por Perona e Malik [2]. Adicionalmente à discussão teórica, um experimento numérico de reconstrução de sinais 1-D foi realizado. No âmbito de processamento de imagens, a técnica estudada foi aplicada visando a evidênciação de (micro) estruturas em imagens mamográficas, ilustrando a propriedade do método estudado em conservar bordas e suprimir ruídos.

Do ponto de vista dos parâmetros da técnica (função difusibilidade, limiar  $K$  e número de iterações  $I$ ), foram apresentadas informações básicas para que aquele que se interesse possa rapidamente iniciar a aplicação da técnica. Contudo, estes parâmetros constituem objeto de estudo, dado que determinam a maneira como a evolução ocorrerá. Efetiva-

mente, trabalhos têm surgido justamente por conta de novas propostas de função difusibilidade, como por exemplo o trabalho de Pollak *et al.* [4].

Um ponto de interesse adicional sobre a técnica de Perona-Malik reside na liberdade de escolha nos esquemas de discretização para a solução numérica da EDP correspondente, pois instabilidades podem surgir quando malhas muito finas forem usadas [13]. Sendo assim, o estudo dos métodos numéricos a serem usados também é relevante.

Tendo em vista as observações acima, podemos considerar como perspectivas futuras o estudo de métodos numéricos mais eficientes, bem como a análise do uso de diferentes funções difusibilidade sobre as imagens. Por fim, os autores agradecem ao grupo do Laboratório de Física Aplicada ao Radiodiagnóstico da Universidade Paulista

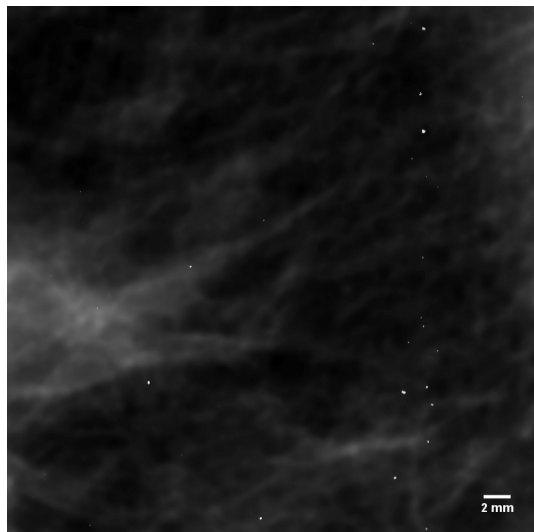


Figura 19: Exemplo de região em mamograma corrompido por ruído oriundo do sistema de digitalização submetida ao processo de filtragem não-linear de Perona-Malik, com  $K = 0,03$  e  $I = 200$ . Para melhor visibilidade, a imagem foi submetida a um alargamento linear de contraste.

(LAFAR-UNESP) por ter cedido várias das imagens usadas neste projeto.

- 
- [1] WITKIN, A.P. *Scale-space filtering: a new approach to multi-scale description*. **Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP '84**, v. 9. 150–153. 1984.
- [2] PERONA, P.; MALIK, J. *Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion*. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence** v. 12. n.7. 629–639. 1990.
- [3] POLLAK, I. *Segmentation and restoration via nonlinear multiscale filtering*. **IEEE Signal Processing Magazine**. v. 19. 26–36. 2002.
- [4] POLLAK, I.; WILLISKY, A.S.; KRIM, H. *Image Segmentation and Edge Enhancement with Stabilized Inverse Diffusion Equations*. **IEEE Transactions on Image Processing**. v. 9. n. 2. 256–266. 2000.
- [5] BARCELOS, C.A.Z. *Restauração e análise de imagens via equações diferenciais parciais*. **Tendências em matemática aplicada e computacional**. v.3. n. 2. 1–13. 2002.
- [6] WEICKERT, J. *Anisotropic diffusion in image processing*. B.G. Teubner: Stuttgart, 1998.
- [7] DINIZ, P.S.R.; SILVA, E.A.B. da; NETTO, S.L. *Digital signal processing - system analysis and design*. 1 ed. UK: Cambridge University Press. 2002.
- [8] FIGUEIREDO, D.G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 274p.
- [9] TSIOTSIOS, C.; PETROU, M. *On the choice of the parameters for anisotropic diffusion in image processing*. **Pattern Recognition**, v. 46, n. 5. 1369–1381. 2012.
- [10] BENHAMOUDA, B. *Parameter adaptation for nonlinear diffusion in image processing*. Dissertation (Master of Scientiae in Mathematics). Department of Mathematics, University of Kaiserslautern. 1994.
- [11] ZIOU, D.; TABBONE, S. *Edge Detection Techniques - an overview*. **International Journal of Pattern Recognition and Image Analysis**. v. 8. 537–559. 1998.
- [12] BIDDLE, H. *Nonlinear diffusion filtering on surfaces*. Dissertation (Master of Scientiae in Mathematical Modelling and Scientific Computing). Hertford College, University of Oxford. 2011.
- [13] WEICKERT, J.; BENHAMOUDA, B. *Why the Perona-Malik filter works?*. Technical report. Department of Computer Science, University of Copenhagen. 1997.
- [14] WEICKERT, J.; ROMENY, B.M.T.H.; VIERGEVER, M.A. *Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering*. **IEEE Transactions on Image Processing**, v. 17. n. 3. 398–410. 1998.
- [15] WEERATUNGA, S.K.; KAMATH, C. *PDE-based non-linear diffusion techniques for denoising scientific and industrial images: an empirical study*. Disponível em <http://www.llnl.gov/tid/Library.html>. Acesso em março/2014.
- [16] MORFU, S. *Image processing using diffusion processes*. **Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)**. 11811–1814. 2010.



## Apêndice A: IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Neste apêndice é apresentada uma forma de se implementar a filtragem via equação de difusão não-linear proposta por Perona e Malik. Esta implementação se baseia na abordagem usada por Biddle [12]. Esta difere da originalmente proposta por Perona e Malik na forma como as difusibilidades são calculadas. Mais detalhes sobre aspectos numéricos da implementação podem ser consultados nas referências [14] e [15].

```

% |-----|
% |          Centro Brasileiro de Pesquisas Fisicas - CBPF          |
% |          Coordenacao de Atividades Tecnologicas - CAT          |
% |          |
% |          PMF.m          |
% |          |
% | Descricao:  Implementacao da evolucao por equacao de          |
% |             difusao segundo o modelo de Perona-Malik.        |
% |             Os argumentos de entrada da funcao sao a imagem   |
% |             (x), o numero de iteracoes (I) e o ponto de      |
% |             maximo da funcao fluxo (K).                      |
% |-----|

```

```

function y = PMF(x,I,K)
dt = 0.1;
y = x;
[r c] = size(y);
for i=1:I
% Diferencas finitas direcionais
D1 = y([2:r r],:)-y;
D2 = y-y([1 1:r-1],:);
D3 = y(:,[2:c c])-y;
D4 = y-y(:,[1 1:c-1]);

% Difusibilidades
f1 = 0.5*(difusi(y([2:r r],:),K)+difusi(y,K));
f2 = 0.5*(difusi(y([1 1:r-1],:),K)+difusi(y,K));
f3 = 0.5*(difusi(y(:,[2:c c]),K)+difusi(y,K));
f4 = 0.5*(difusi(y(:,[1 1:c-1]),K)+difusi(y,K));

% Fluxos
F1 = D1.*f1;   F2 = D2.*f2;
F3 = D3.*f3;   F4 = D4.*f4;

y = y+dt*(F1-F2+F3-F4);
end

figure; imshow([x y]);
end

% funcao difusibilidade
function y = difusi(x,z)
[r c] = size(x);
% Diferencas finitas direcionais
dx = 0.5*(x(:,[2:c c])-x(:,[1 1:c-1]));
dy = 0.5*(x([2:r r],:)-x([1 1:r-1],:));
% Aproximacao da magnitude do gradiente
MAG = sqrt(dx.^2+dy.^2);

y = exp(-(MAG/z).^2);
end

```