

Método de Reconhecimento de Arcos Gravitacionais com Redes Neurais Utilizando a Decomposição por Mediatrizes

C.R. Bom* & M. Makler†

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rua Dr. Xavier Sigaud 150, Rio de Janeiro, RJ - 22290-180, Brasil & Laboratório Interinstitucional de e-Astronomia - LIneA, Rua Gal. José Cristino 77, Rio de Janeiro, RJ - 20921-400, Brasil

Marcelo P. de Albuquerque‡

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rua Dr. Xavier Sigaud 150, Rio de Janeiro, RJ - 22290-180, Brasil

A detecção e caracterização de arcos possui diversas aplicações no processamento de imagens digitais como, por exemplo, na busca de arcos gravitacionais em imagens astronômicas. A maioria dos métodos propostos para a detecção automatizada de arcos baseia-se em medidas nos objetos identificados nas imagens, como por exemplo, no seu comprimento e largura. Neste trabalho utilizamos uma forma de análise que explora o fato dos arcos serem estruturas geralmente curvas. Para isso utilizamos um método que denominamos de Decomposição por Mediatrizes. Esse método decompõe objetos alongados em um conjunto de filamentos. A partir de medidas baseadas nas saídas desse método de Decomposição que incluem estatísticas relacionadas à curvatura do objeto treinamos e validamos uma Rede Neural Artificial que decidirá se o objeto analisado é um arco ou não. Em testes preliminares, utilizando uma amostra simulada de arcos gravitacionais, atingimos um índice de acerto na identificação da ordem de 75% com cerca de 10% de falsos positivos.

1. INTRODUÇÃO

O fenômeno de lenteamento gravitacional [1–3] pode ser observado quando a luz sofre um desvio em sua trajetória, de maneira análoga ao que ocorre com uma lente ótica, devido à curvatura do espaço-tempo. A distribuição de massa fonte dessa curvatura denominamos lente. Quando esse efeito gera imagens múltiplas, arcos ou anéis o classificamos como efeito forte de lente gravitacional. Este trabalho é focado na detecção de arcos gravitacionais aos quais nos referiremos simplesmente como arcos.

Nos últimos anos o interesse no estudo dos arcos tem se intensificado devido ao aumento na quantidade de dados disponíveis graças aos levantamentos de imagens do céu em grandes áreas (como por exemplo, *Sloan Digital Sky Survey* [4], *Canada-France-Hawaii Telescope Legacy Survey* [5, 6]) e as diversas aplicações em Cosmologia e Astrofísica (por exemplo [8–15]). Uma vantagem do uso de arcos nesses estudos se deve ao fato de que o efeito causado depende exclusivamente da distribuição de massa do objeto que atua como lente, independentemente de hipóteses sobre o estado físico da lente, por exemplo, equilíbrio hidrostático ou do virial.

Nos próximos anos a quantidade e qualidade dos dados disponíveis aumentará ainda mais com novos *surveys* de grande área, como o *Dark Energy Survey* (DES¹) [17] que irá mapear uma área de cerca de 10% da esfera celeste com resoluções e profundidades inéditas. Por exemplo, espera-se que o número de arcos conhecidos aumente em cerca de uma ordem de grandeza com o DES.

Mesmo com o aumento no volume de dados relacionados a arcos gravitacionais, sua identificação tem sido feita, ma-

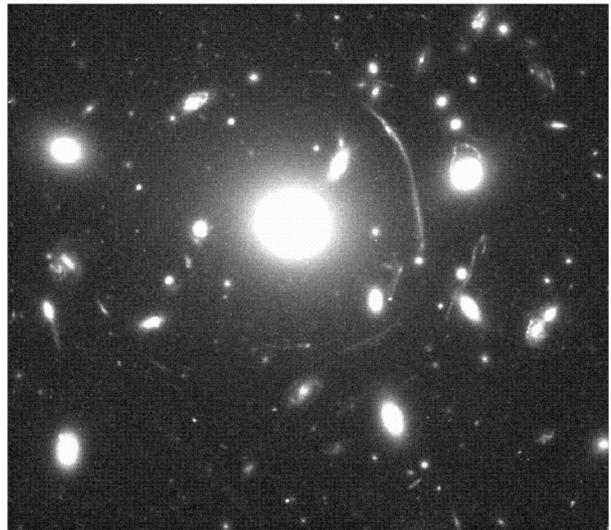


Figura 1: Imagem com candidatos a arco no aglomerado Abell 1689 realizada com o telescópio *Hubble* [16].

oritariamente, por meio de uma análise visual nas imagens produzidas pelos telescópios. Esse tipo de análise nos leva a dois aspectos indesejados. O primeiro se deve ao fato de que a análise visual é subjetiva, seguindo um critério que pode variar significativamente entre os observadores, o que pode comprometer o uso de arcos em análises estatísticas. O segundo ocorre porque esse método de identificação necessita de tempo considerável para ser realizado, o que pode torná-lo proibitivo para estudos nos levantamentos de grande área futuros. Isso motivou o desenvolvimento de métodos automatizados para a busca de arcos [18–24]. Neste trabalho desenvolvemos um novo método de busca de arcos baseado em medidas de morfologia oriundas do método de Decomposição por Mediatrizes [25] e no uso de uma Rede Neural Artificial (RNA).

Este trabalho está organizado nas seções a seguir. Na seção 2 será descrito em detalhes o método de análise e

*Electronic address: debom@cbpf.br

†Electronic address: martin@cbpf.br

‡Electronic address: marcelo@cbpf.br

¹ Para maiores informações sobre o projeto ver www.darkenergysurvey.org e www.des-brazil.org.

identificação de objetos. Em 2.1, detalharemos o processo de identificação e seleção dos objetos. Na seção 2.2 descreveremos o método de Decomposição por Mediatrizes. Na seção 2.3 apresentaremos as medidas realizadas a partir dessa decomposição e em 2.4 mostraremos como é feita a identificação final dos arcos com uma RNA. Na seção 3 discutiremos a aplicação do método a um conjunto contendo da ordem de uma centena de objetos. Finalmente, na seção 4 é apresentada uma discussão dos resultados.

2. MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE ARCOS UTILIZANDO A DECOMPOSIÇÃO POR MEDIATRIZES

O método proposto para a identificação de arcos é dividido em quatro fases, conforme apresentado na Figura 2. Na primeira fase estabelecemos um conjunto de objetos que serão analisados pelo método. Para isso identificamos objetos em imagens astronômicas e realizamos alguns cortes para eliminar detecções não confiáveis (ver seção 2.1). Cada objeto dará origem a uma imagem que contém somente ele, denominada selo. Se uma imagem antes da identificação possuir centenas de objetos, serão gerados a partir dela, centenas de selos. A seguir, na segunda fase, aplicamos a técnica de Decomposição por Mediatrizes, que divide os objetos em filamentos ao longo da direção de maior dimensão. Esse método analisa cada objeto individualmente e retorna um conjunto de vetores orientados. Na terceira fase realizamos medidas de atributos e análises estatísticas a partir dos dados gerados pela Decomposição por Mediatrizes. Por último, na quarta fase, utilizamos as medidas da fase anterior como entrada para uma RNA que decidirá se o objeto é um arco ou não. Nas subseções a seguir detalharemos cada uma dessas fases.

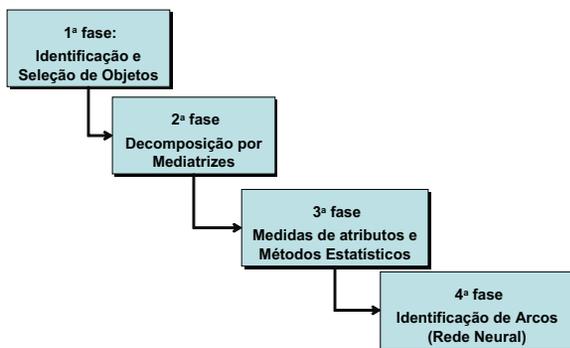


Figura 2: As quatro fases do processo de detecção de arcos.

2.1. Identificação de Objetos

Para identificar os objetos em imagens astronômicas utilizamos o aplicativo *SExtractor* [26], que é de uso padrão na análise de imagens na área extragaláctica. Ele gera, entre outras saídas, uma imagem segmentada na qual os pixels pertencentes a um objeto são identificados com um valor único para cada objeto e os pixels de fundo recebem valor zero.

Após esse procedimento, descartamos detecções próximas às fronteiras da imagem, já que grande parte das detecções nas bordas das CCDs são espúrias.

São gerados selos para cada objeto, utilizando o módulo *objsshot* da biblioteca *SLtools* [27], que executa o *SExtractor* e em seguida gera os selos automaticamente. São esses selos que serão analisados na próxima fase. A Figura 3 ilustra esta fase.

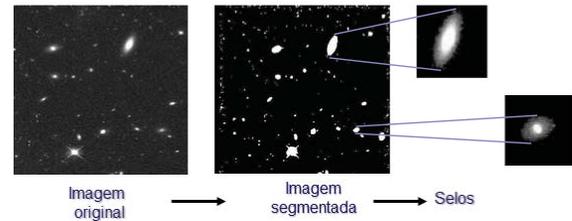


Figura 3: Ilustração do processo de identificação de objetos e criação de selos a partir do módulo *objsshot* da biblioteca *SLtools* utilizando o código *SExtractor*.

2.2. Decomposição por Mediatrizes

O método de Decomposição por Mediatrizes [25] é um processo iterativo para decompor um objeto em N segmentos orientados. Essa técnica foi desenvolvida visando o problema da análise dos arcos gravitacionais e decompõe um objeto alongado em segmentos ao longo da maior dimensão do objeto, próximo à região de maior brilho local do objeto nessa direção. A Decomposição é realizada em n passos (ver figuras 4 a 7). No passo 1, ilustrado na Figura 4, são determinados os dois extremos do objeto a ser analisado. A seguir é determinada a reta Mediatriz entre esses dois pontos. Sejam os dois pontos $E_1 = (x_1, y_1)$ e $E_2 = (x_2, y_2)$ os extremos do objeto e a reta mediatriz escrita da forma $y = mx + b$, os coeficientes que determinam a reta, m e b , e o ângulo θ com o eixo x são dados por:

$$m = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \quad (1)$$

$$b = -\frac{y_1 + y_2 - m(x_1 + x_2)}{2}, \quad (2)$$

$$\theta = \arctan(m). \quad (3)$$

O pixel de maior intensidade do objeto próximo à reta mediatriz² é escolhido como primeiro ponto da Decomposição por Mediatrizes M^1 . Em seguida repetimos o procedimento

² O pixel de maior intensidade dentre os pixels nas posições \bar{x}_i tal que, a distância entre estes pixels e a reta mediatriz j , s_j , satisfaz a condição $s_j(\bar{x}_i) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} dpix$ onde $dpix$ é a escala do pixel.

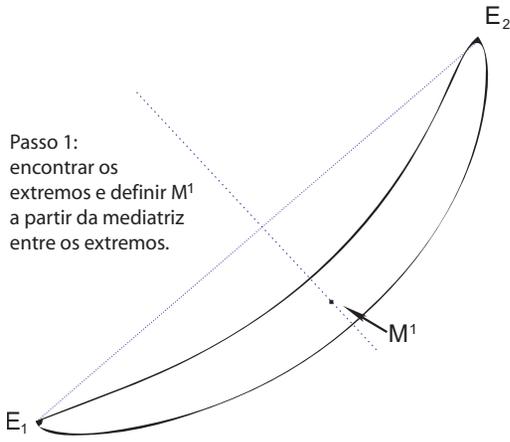


Figura 4: Primeiro passo da decomposição: encontrar extremos (E_1 e E_2), determinar a reta mediatriz e obter o ponto M^1 de maior intensidade ao longo desta.

entre E_1 e M^1 e entre E_2 e M^1 e são determinadas novas retas mediatrizes entre os pontos vizinhos. Este será, então, o segundo nível da iteração. Na Figura 5 está representado o ponto M_1^2 , o primeiro ponto do segundo nível.

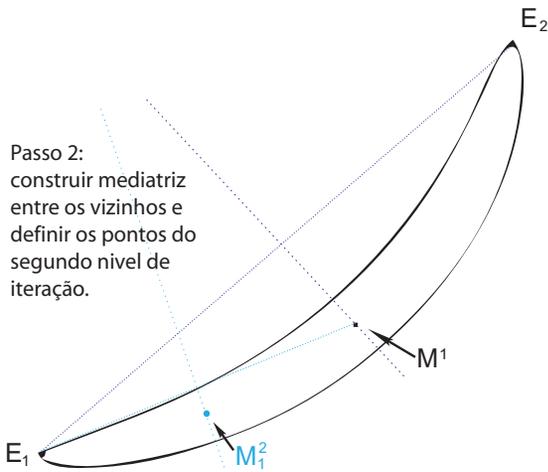


Figura 5: Segundo passo da Decomposição: nova reta mediatriz entre pontos vizinhos (E_1 e M^1). O novo ponto da Decomposição por Mediatrizes é o pixel de maior intensidade próximo à reta mediatriz (M_1^2).

Esse processo é repetido n vezes calculando a mediatriz entre pontos vizinhos das iterações precedentes e determinando novos pontos, M_l^k , sendo k o nível da iteração e l o número do ponto. A Figura 6 ilustra o processo para $n = 3$.

Em princípio o processo pode ser repetido indefinidamente, então é preciso determinar um critério de parada para o algoritmo. O critério utilizado neste trabalho é seguir ao próximo nível da iteração enquanto a distância entre dois vizinhos, l_i , obedecer à seguinte relação com a largura estimada W :

$$l_i \leq W. \quad (4)$$

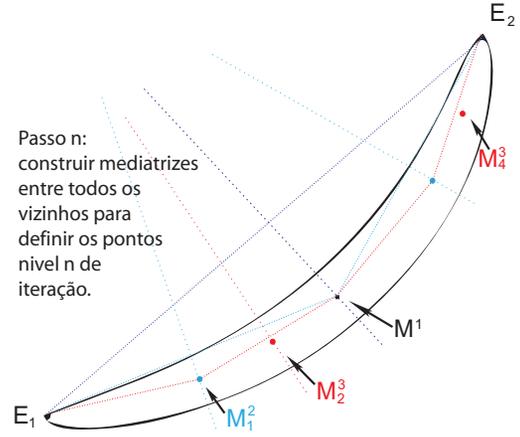


Figura 6: Passo 3 da Decomposição. Alguns pontos foram omitidos.

A largura W é definida a partir do comprimento L_n calculado para n iterações, fazendo a hipótese de que o arco pode ser aproximado por uma elipse encurvada:

$$W = \frac{4A}{\pi L_n}, \quad (5)$$

onde

$$L_n = \sum_{i=1}^N l_i \quad (6)$$

e A é a área do objeto calculada a partir da soma das áreas dos pixels pertencentes ao objeto.

Finalmente, ao chegar ao último passo, cada par de pontos vizinhos determinará um vetor \vec{n}_i , cujo módulo é a distância entre esses pontos, l_i ($|\vec{n}_i| = l_i$). A origem é o ponto médio entre os dois vizinhos e a direção é perpendicular ao segmento que os une. Este conjunto de vetores é a saída do algoritmo e será utilizado nas medidas de atributos e identificação dos arcos. O passo final desta etapa está ilustrado na Figura 7.

2.3. Medidas de Atributos e Métodos Estatísticos

A partir da Decomposição por Mediatrizes podemos definir um conjunto de medidas, que serão relevantes para a detecção de arcos e para estudos que visem caracterizá-los.

Para isso, utilizamos o comprimento L depois da última iteração definido na equação (6) e a largura W dada pela equação (5). Como arcos são objetos alongados, esperamos que sua razão comprimento-largura L/W seja maior que 1. Isso significa que em nossa análise objetos com $L/W \lesssim 1$ podem ser desprezados. Para realizar medidas que expressem se objeto é arqueado ou não, desejamos uma quantidade que forneça informação sobre o quanto os vetores \vec{n}_i convergem para um centro, comportamento esperado para um objeto arqueado, e a localização desse centro. Para isso definimos uma função $M(\vec{r})$ tal que para cada ponto no plano $\vec{r} = (x, y)$ a função retorna a soma das distâncias ao quadrado

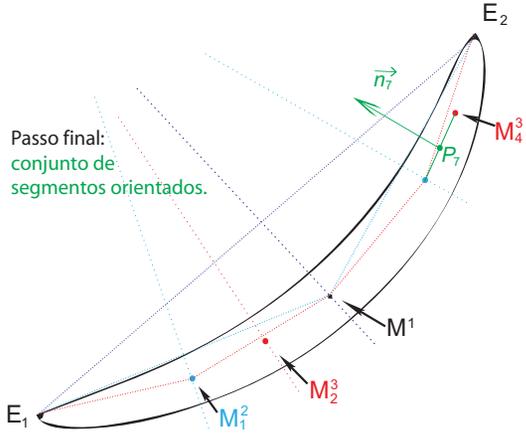


Figura 7: Passo final da Decomposição por Mediatrizes. O vetor \vec{n}_7 , com origem em P_7 tendo como módulo a distância entre os pontos adjacentes M_2^2 e M_4^3 é uma das saídas do método. Neste caso representado após 3 iterações.

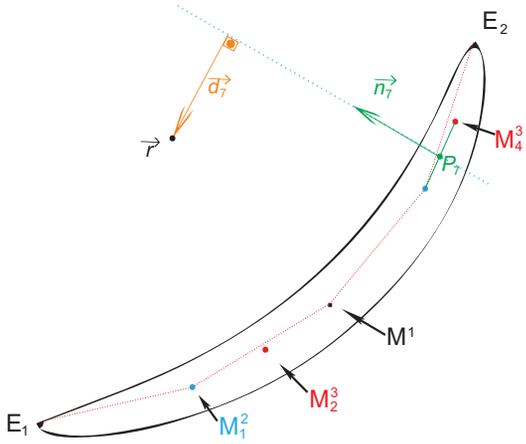


Figura 8: Exemplo de vetor \vec{d}_i utilizado na definição da função $M(\vec{r})$ para um vetor posição \vec{r}_i e a reta extrapolada a partir do vetor \vec{n}_7 .

$|\vec{d}_i|^2$ de cada reta extrapolada do vetor \vec{n}_i a \vec{r} . A Figura 8 ilustra essas quantidades. Como a soma dessas distâncias deve ser proporcional ao número de vetores e cada objeto pode ter um número diferente de vetores é preciso normalizá-la pela quantidade N , de vetores. Assim, definimos a função $M(\vec{r})$ por:

$$M(\vec{r}) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\vec{d}_i(\vec{r}, \vec{n}_i)|^2. \quad (7)$$

Se as retas extrapoladas a partir dos vetores \vec{n}_i se cruzarem próximas umas às outras, ou ao menos se aproximarem, é esperado que nessa região ocorra um mínimo em $M(\vec{r})$ na posição \vec{r}_0 , no qual $M(\vec{r}_0) = M_0$, assinalado na Figura 9. No caso particular de um arco de circunferência esse mínimo corresponde exatamente ao centro do círculo ao qual pertence o arco. Analogamente, podemos associar, \vec{r}_0 a um centro de curvatura. Além disso, quanto melhor definido for o mínimo mais confiança teremos que \vec{r}_0 representa um centro de curvatura. Podemos definir uma região de confiança (RC) em torno do mínimo M_0 tal que:

$$M(\vec{r}) - M_0 \leq \sigma_m, \quad (8)$$

onde σ_m é um parâmetro arbitrário. A Figura 9 ilustra a RC e \vec{r}_0 no caso de um arco e em um objeto que não é um arco.

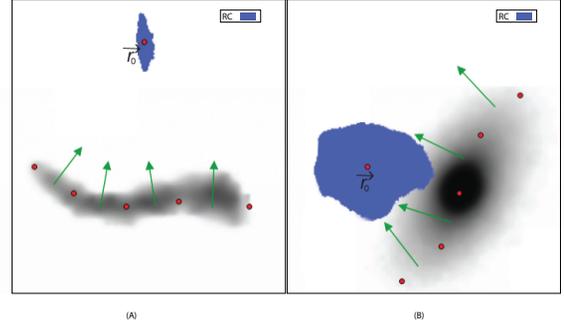


Figura 9: Região de Confiança (RC), centro de curvatura \vec{r}_0 , vetores normais \vec{n}_i e pontos calculados pela Decomposição por Mediatrizes representados para um arco simulado (A) e em uma imagem de galáxia do telescópio *Hubble* (B) [16].

A partir de uma primeira análise qualitativa dos objetos testados notamos que, como esperado, em geral a RC é comparativamente maior em não arcos, menos excêntrica e, não raramente, muito próxima ao objeto, interceptando-o. Essas observações foram então a motivação para um estudo da distribuição da razão I entre o número de pixels p da RC que intercepta o arco e a quantidade total de pixels A do arco, isto é, $I = p/A$ e o seu uso como um discriminante para detectar arcos.

2.4. Identificação de Arcos e Rede Neural

Nesta última fase utilizamos uma RNA do tipo *backpropagation* com o algoritmo de treinamento *Levenberg-Marquard* implementado no MATLAB (Neural Network Toolbox [28]). A rede é estruturada em três camadas. A camada de entrada de dados tem a mesma quantidade de neurônios que o número de parâmetros de entrada. A camada intermediária tem um número livre de neurônios que desejamos ajustar para o melhor desempenho da rede. Já a última camada tem a função de calcular o resultado final da rede e possui a mesma quantidade de neurônios que a quantidade de parâmetros de resposta da rede.

Para que esse tipo de rede faça a classificação é necessário que um conjunto representativo de arcos e objetos que não são arcos seja apresentada previamente à RNA para que ela possa ser treinada para reconhecer o padrão que desejamos classificar. Chamamos esse conjunto de Grupo de Treinamento. Os dados gerados pela fase de Medidas de Atributos descritos na seção 2.3 foram utilizados como entrada para a rede neural. A saída da rede utilizada é um número tipo *float* entre -1 e $+1$. Definimos como arco os objetos que possuem valores entre 0.5 e 1 , não arcos como objetos com valores no intervalo de -1 a -0.5 e como detecções não classificadas entre -0.5 e $+0.5$. Se soubermos classificar previamente os

objetos é possível obter a eficiência de acertos e quantidade de falsos positivos, por exemplo.

3. APLICAÇÃO DO MÉTODO

O método de Decomposição por Mediatrizes foi aplicado a dois grupos de objetos: arcos e não arcos, contendo na entrada da fase de decomposição 134 e 183 objetos, respectivamente. O grupo de objetos não arcos foi extraído de uma imagem do telescópio espacial *Hubble* captada pela câmera *Wide Field Planetary Câmera 2* [16] que após a primeira fase foram visualmente identificados como não arcos. Para definir um conjunto de arcos utilizamos um conjunto simulado através do software *AddArcs* [24, 29, 30]. Este software efetua o lenteamento gravitacional, identifica as imagens e simula efeitos observacionais, como o “borramento” da imagem pela atmosfera e ruído do detector. Uma das saídas desse programa são os selos dos arcos. Nos gráficos das Figuras 10 e 11 são apresentadas as distribuições de três candidatos a discriminantes previamente apresentados: I , L/W definido pelas expressões (6) e (5), e M_0/L . Os círculos azuis são os não arcos extraídos de uma imagem do *Hubble* e os losangos magenta os arcos obtidos pelo *AddArcs*.

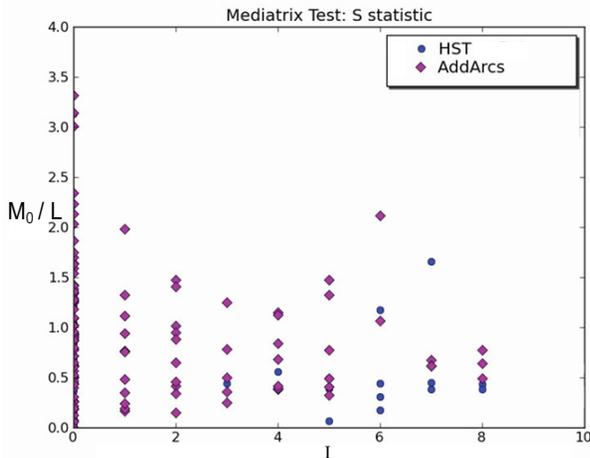


Figura 10: Distribuição de candidatos a discriminantes de arcos. Razão entre o mínimo da função $M(\vec{r})$ e o comprimento L , M_0/L , por I , em um conjunto de 134 arcos (*AddArcs*) e 183 não arcos (*HST*).

Nesses resultados destacamos que, para efetuar os cálculos referentes à função $M(\vec{r})$, são necessários pelo menos dois vetores \vec{n}_i e, dada a condição estabelecida em (4) a maior parte dos objetos não arcos que, de maneira geral, não são alongados, acabam eliminados nessa fase. Do nosso conjunto de não arcos analisados 76,5% foram eliminados nessa fase, restando apenas 23,5% dos não arcos para serem analisados e classificados na próxima etapa. Do conjunto de arcos foram eliminados, por esse mesmo critério apenas 4,5%. A eliminação expressiva dos não arcos nesse estágio otimiza o método, pois a rede neural terá que processar um número muito menor de dados, apesar da pequena perda dos arcos. Também destacamos que, individualmente, nenhum dos discriminantes apresentados é capaz de separar arcos e

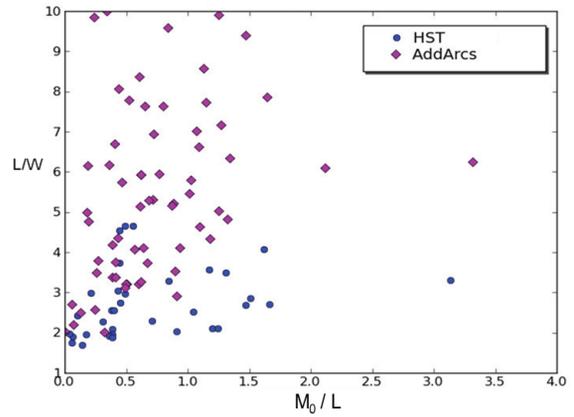


Figura 11: Distribuição de candidatos a discriminantes de arcos: razões comprimento-largura L/W e entre o mínimo da função $M(\vec{r})$ e o comprimento L , M_0/L , em um conjunto de 134 arcos (*AddArcs*) e 183 não arcos (*HST*).

não arcos de modo preciso.

Para treinar a RNA utilizando os dois grupos dividimos o total dos objetos (100%, composto de arcos e não arcos) em dois subgrupos: Treinamento (80%) e Teste da rede (20%). A maior proporção para o Grupo de Treinamento é típica no uso de RNA que precisam ser treinadas. Esses subgrupos são definidos por meio de sorteio.

A rede é então treinada e testada para esses grupos. No intuito de aumentar a confiabilidade do processo os subgrupos são novamente sorteados e o treino e teste são repetidos. Esse procedimento é realizado cinco vezes para cada configuração da rede testada. O uso de cinco grupos Treinamento-Teste sorteados minimiza um eventual melhor desempenho de um grupo específico devido a sua escolha de caráter aleatório. Se a dispersão dos resultados entre os grupos for grande, isso sugere que os parâmetros da rede não foram bem escolhidos e o seu desempenho, seja ele satisfatório ou não, é devido a uma escolha fortuita dos grupos e não do desempenho em si da rede. Por outro lado, uma dispersão grande pode sugerir, também que a rede precisa de maior quantidade de dados.

Nos resultados apresentados na Figura 12 podemos observar i) o índice de acerto, definido pela razão entre o número de objetos classificados corretamente e o número total de objetos testados, ii) o índice de erro, definido pela razão entre número classificações incorretas e o número total de objetos testados, iii) o índice de falsos positivos, definido pela razão entre o número de não arcos classificados como arcos e o número total de arcos e iv) o índice de dúvida que é a razão entre os objetos sem classificação e o número total de objetos detectados. Essas quantidades são mostradas em função do número de neurônios na camada intermediária, parâmetro da rede que desejamos otimizar.

É possível afirmar que para configurações com menos de 8 neurônios temos uma quantidade de acerto no intervalo em cerca de 60% - 85% dos casos. Com detecções falsas da ordem de 10%. Utilizando mais neurônios a rede passa a errar cada vez mais, de forma sistemática. Tomando uma configuração de seis neurônios na camada intermediária, um dos resultados entre os três de maior acerto, por exemplo, o acerto ficou em aproximadamente 75%, a classificação equi-

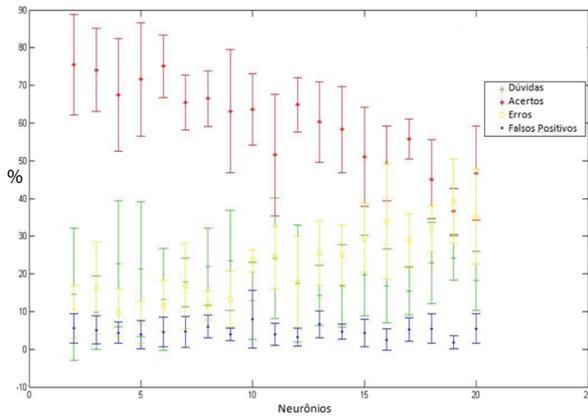


Figura 12: Percentual de acerto, dúvida, erro e falsos positivos do conjunto de teste para diferentes quantidades de neurônios na camada intermediária.

vocada e a dúvida 12% e as detecções falsas em torno de 5%. Esse efeito é esperado pois, conforme a rede neural ganha mais neurônios para classificar ela perde a capacidade de generalização, já que o excesso de parâmetros ajustáveis na rede faz com que a mesma tenda a “decorar” o conjunto de treinamento e, portanto, errar a classificação do conjunto de testes.

4. DISCUSSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho apresentamos um método de identificação de arcos gravitacionais baseado na técnica de Decomposição

por Mediatrizes utilizando redes neurais artificiais. Neste estudo preliminar o método proposto, utilizando uma configuração com 6 neurônios na camada intermediária, apresentou 75% de acerto. Os acertos obtidos são referentes apenas a objetos que conseguiram chegar até a fase final já que a maior parte dos não arcos (76,5%) foi eliminada antes da fase final. A pequena quantidade de falsos positivos até agora (~10%) também é um fator positivo. A fim de melhorar a eficiência do método (e.g. otimizando a quantidade de neurônios) ainda é necessário a realização de testes com conjuntos de imagens mais realistas e mais representativos, utilizando milhares de objetos.

5. AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi possível graças ao apoio do Laboratório Interinstitucional de e-Astronomia (LineA) operado em conjunto pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), o Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC) e o Observatório Nacional (ON) e financiado pelo Ministério da Ciência e Tecnologia e Inovação (MCTI).

Esse trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq (projetos 312425/2006-6, 486138/2007-0 e 312876/2009-2), FINEP (projeto 01.06.0383.00) e FAPERJ (projeto E-26/171.206/2006).

-
- [1] Schneider, P.; Ehlers, J.; Falco, E.E.; *Gravitational Lenses*, 1992, Springer-Verlag, Berlin.
 - [2] Mollerach, S.; Roulet, E.; *Gravitational Lensing and Microlensing*, 2002, World Scientific.
 - [3] Schneider, P.; Wambsganss, J.; Kochanek, C.S.; *33rd Saas Fee Advanced Course, Gravitational Lensing*, 2003.
 - [4] Hiroaki, A.; Prieto, C.A. et al; *The Eighth Data Release of the Sloan Digital Sky Survey: First Data from SDSS-III*, 2011, ApJS 193, article id 29.
 - [5] Gwyn, Stephen D. J.; *The CFHT Legacy Survey: stacked images and catalogs*, 2011, arXiv:1101.1084v2.
 - [6] Hoekstra, H.; Mellier, Y.; Van Waerbeke, L.; Semboloni, E.; Fu, L.; Hudson, M.J.; Parker, L.C.; Tereno, I.; Benabed, K.; *First cosmic shear results from the Canada-France-Hawaii Telescope Wide Synoptic Legacy Survey*, 2006, ApJ 647, 116, astro-ph/0511089v1.
 - [7] Kneib, J.-P.; Van Waerbeke, L.; Makler, M.; Leauthaud, A.; et al.; 2010, *CFHT/Megacam High-Resolution Imaging of the SDSS Stripe 82*, CFHT projects 10BF023, 10BC022, 10BB009.
 - [8] Fedeli, C.; Bartelmann, M.; Meneghetti, M.; Moscardini, L.; *Strong lensing statistics and the power spectrum normalization*, 2008, A&A 486, 345, arXiv:0803.0656.
 - [9] Carrasco, E. R.; Gomez, P. L.; Verdugo, T.; Lee, H.; Diaz, R.; Bergmann, M.; Turner, J. E. H.; Miller, B. W.; West, M. J.; *Strong Gravitational Lensing by the Super-massive cD Galaxy in Abell 3827*, 2010, ApJ 715, L160.
 - [10] Rozo, E.; Nagai, D.; Keeton, C., Kravtsov, A. *The Impact of Baryonic Cooling on Giant Arc Abundances*, 2008, ApJ 687, 22, astro-ph/0609621.
 - [11] Wambsganss, J.; Bode, P.; Ostriker, J. P.; *Giant Arc Statistics in Concord with a Concordance Lambda Cold Dark Matter Universe*, 2004, ApJ 606, L93, astro-ph/0306088.
 - [12] Meneghetti, M.; Jain, B.; Bartelmann, M.; Dolag, K. *Constraints on Dark Energy Models from Galaxy Clusters with Multiple Arcs*, 2005, MNRAS 362, 1301, astro-ph/0409030.
 - [13] Suyu, S. H.; Marshall, P.J.; Auger, M.W.; Hilbert, S.; Blandford, R.D.; Koopmans, L. V. E.; Fassnacht, C. D.; Treu, T.; *Dissecting the Gravitational Lens B1608+656. II. Precision Measurements of the Hubble Constant, Spatial Curvature, and the Dark Energy Equation of State*, 2010, ApJ 711, 201.
 - [14] Caminha, G.B.; *Cálculo da Abundância de Arcos Gravitacionais em Aglomerados de Galáxias*, 2009, Dissertação (Mestrado em Física) - CBPF.
 - [15] Dumet M., H.; *Modelagens Semianalíticas para Arcos Gravitacionais: Seção de Choque e Método Perturbativo em Lentes Pseudoelípticas*, 2011, Tese (Doutorado em Física) - CBPF.
 - [16] Smith, G.P.; Kneib, Jean-Paul; Smail, I.; Mazzotta, P.; Ebeling, H.; Harald, O.C.; *A Hubble Space Telescope lensing survey of X-ray luminous galaxy clusters - IV. Mass, structure and thermodynamics of cluster cores at z=0.2*, 2005, MNRAS 359, 417, astro-ph/0403588
 - [17] Abbott, T.; Aldering, G.; Annis, J.; et al.; *The Dark Energy Survey Collaboration*, 2005, astro-ph/0510346.

- [18] Horesh, A.; Maoz, D.; Ebeling, H.; Seidel, G.; Bartelmann, M.; *The lensing efficiencies of MACS X-ray selected versus RCS optically selected galaxy clusters* 2010, MNRAS 406, 1318.
- [19] Lenzen, F.; Schindler, S.; Scherzer, O.; *Automatic detection of arcs and arclets formed by gravitational lensing*, 2004, A&A 416, 391L, astro-ph/0311554
- [20] Alard, C.; *Automated Detection of Gravitational Arcs*, astro-ph/0606757.
- [21] More, A.; Cabanac, R.; More, S.; Alard, C.; Limousin, M.; Kneib, J-P.; Gavazzi, R.; Motta, V.; *The CFHTLS-Strong Lensing Legacy Survey (SL2S): Investigating the group-scale lenses with the SARCS sample*, arXiv:1109.1821v1.
- [22] Seidel, G.; Bartelmann, M. *Arcfinder: An Algorithm for the Automatic Detection of Gravitational Arcs*, 2007, A&A 472, 341, astro-ph/0607547.
- [23] Estrada, J.; Annis, J.; Diehl, H.T.; Hall, P.B.; Las, T.; Lin, H.; Makler, M.; Merritt, K.W.; Scarpine, V.; Allam, S.; Tucker, D.; *A Systematic Search for High Surface Brightness Giant Arcs in a Sloan Digital Sky Survey Cluster Sample*, 2007, ApJ 660, 1176, astro-ph/0701383v1.
- [24] Brandt, C.; *Simulação e Busca automatizada de arcos gravitacionais*, 2012, Dissertação (Mestrado em Física) - LNCC.
- [25] Bom, C.R.; Makler M.; Albuquerque, Marcelo P.; *Mediatrix filamentation method for object characterization*, em preparação.
- [26] Bertin, E.; Arnouts, S; *SExtractor: Software for source extraction*, 1996, A&AS 117, 393.
- [27] Brandt, C. H.; Makler, M.; Neto, A. F.; Ferreira, P. C.; Furlanetto, C.; Caminha, G. B.; Dúmet-Montoya, H.; Pereira, M. E. S.; Bom, C. R.; Moraes, B.; et al; *SLtools: a library for Strong Lensing Applications*, em preparação. Documentação do código disponível em <http://che.cbpf.br>.
- [28] Faria, E. L. de; Alfonso, J. L. G.; Cavalcante, J.T.P.D.; Albuquerque, Marcio P.; Albuquerque, Marcelo P.; *Introdução ao Toolbox de Redes Neurais de Kohonen*, 2010, N.T. CBPF 001/10.
- [29] Brandt, C. H.; Ferreira, P. C.; Makler, M.; Neto, A. F. et al; *AddArcs: software for gravitational arc simulations*, em preparação.
- [30] Ferreira, P. C.; *Simulações de arcos gravitacionais em imagens e estudo de sua razão axial*, 2010, Dissertação (Mestrado em Física) - UFRJ.