ISSN 0029-3865

CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

Notas de Física

CBPF-NF-009/20

December 2020

Um colorido *tour* pelo R^4

A.F.F. Teixeira

NIB Núcleo de Informação C&T e Biblioteca

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES

PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL

Um colorido *tour* pelo R^4

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

22290–180 Rio de Janeiro–RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

8 de Dezembro de 2020

Resumo

Percorre-se o 4–espaço vetorial real usando algumas ferramentas novas ou pouco conhecidas pelos físicos, tais como o símbolo ∞^n e um modelo 3–dimensional para os subespaços. Privilegia-se uma direção e se cria um código de cores para os vetores, facilitando a percepção dos subespaços bi– e tri–dimensionais. Constroi-se tabelas pormenorizadas de pertinências e normalidades entre todos os subespaços.

Palavras-chave: espaçotempo, subespaços, cones de luz.

- - - - -

The real vector 4–space is visited using some tools, new or little known by physicists, such as the symbol ∞^n and a 3–dimensional model for the subspaces. A direction is priviledged, allowing a color code for the vectors and easy perception of subspaces with 2 and 3 dimensions. Detailed tables of inclusions and normalities among all subspaces are displayed.

Key words: spacetime, subspaces, light cones.

1 Introdução

Navegaremos pelo quadriespaço vetorial real R^4. Ele, seus subespaços, e seus cones de luz são importantes para as relatividades especial e geral. Ao que saibamos, alguns tópicos desta exposição são novos na literatura: o símbolo ∞^n (Seção 4), um prático modelo tridimensional para os subespaços (Seção 7), e tabelas detalhadas de pertinências e normalidades entre subespaços (Seções 8 e 9).

2 Ângulo entre quadrivetores

Para o R^4, escolhemos uma base $\{\tilde{t};\, \tilde{x},\, \tilde{y},\, \tilde{z}\}$, na qual um vetor $\tilde{a}$ terá componentes $\tilde{a} := [a_0;\, a_1,\, a_2,\, a_3\,]$. Definimos o produto escalar entre dois vetores, e o módulo de um vetor, como

$$\tilde{a}\cdot\tilde{b} := a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\,, \quad |\tilde{a}| := \sqrt{\tilde{a}\cdot\tilde{a}}\,. \tag{1}$$

O ângulo φ entre os vetores $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ é obtido de

$$\tilde{a}\cdot\tilde{b} = |\tilde{a}|\,|\tilde{b}|\,\cos\varphi\,, \quad 0^{\rm o} \le \varphi \le 180^{\rm o}; \tag{2}$$

diremos que $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ são (mutuamente) normais se $\tilde{a}\cdot\tilde{b} = 0$, e diremos que $\tilde{a}$ é unitário se $|\tilde{a}| = 1$; em particular, os quatro vetores base são normais e unitários.

Chamaremos *direção a*, a reta *não-orientada* que contenha o vetor $\tilde{a}$. A direção t será privilegiada, e denominada temporal. As direções que formem com t ângulo

$\eta < 45^o$, ou $= 45^o$ ou $> 45^o$, serão ditas tipo tempo τ, ou tipo luz λ, ou tipo espaço σ, respectivamente.

Correspondentemente, teremos vetores tipo tempo $\tilde{\tau}$, ou luz $\tilde{\lambda}$ ou espaço $\tilde{\sigma}$. Esta classificação é importante na cinemática relativista, onde velocidades de objetos são representadas por vetores $\tilde{\tau}$, enquanto velocidades iguais ou maiores que c são representadas por vetores $\tilde{\lambda}$ e $\tilde{\sigma}$, respectivamente.

Com frequência usaremos a decomposição $\tilde{a} := [a_0;\, \vec{a}\,]$, e definimos

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\,, \qquad |\vec{a}| := \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}\,. \tag{3}$$

Definimos também um índice, *temporalidade* $-1 \leq T \leq 1$, de um dado vetor $\tilde{a}$:

$$T := \frac{|a_0| - |\vec{a}\,|}{|a_0| + |\vec{a}\,|}\,. \tag{4}$$

Vetores e direções $\{\tau, \lambda, \sigma\}$ têm T {positivo, zero, negativo}, respectivamente; em particular, a direção t tem a máxima temporalidade, 1. Note que (4) é invariante sob rotações dos eixos $\{x, y, z\}$.

A normalidade entre vetores tipo luz pode nos surpreender. Com efeito, sejam $\tilde{\lambda_1} := k_1[1;\, \vec{\lambda_1}\,]$ e $\tilde{\lambda_2} := k_2[1;\, \vec{\lambda_2}\,]$ os dois vetores, com $|\vec{\lambda_1}| = |\vec{\lambda_2}| = 1$. Ora, $\tilde{\lambda_1} \cdot \tilde{\lambda_2} = 0$ implica $1 + \vec{\lambda_1} \cdot \vec{\lambda_2} = 0$, portanto $\angle(\vec{\lambda_1}, \vec{\lambda_2}\,) = 180^o$. Concluímos que, se $\tilde{\lambda_1}$ for normal a $\tilde{\lambda_2}$, suas partes espaciais $k_1\vec{\lambda_1}$ e $k_2\vec{\lambda_2}$ serão paralelas ou antiparalelas.

Somente direções σ podem ser normais a uma τ. [Com efeito, mediante apropriada rotação dos eixos $\{x, y, z\}$ toda direção τ pode ter forma $\tau := [\cos\eta;\, \sin\eta;\, 0,\, 0\,]$ com $0^o \leq \eta < 45^o$; uma direção $\delta := [a; b, c, d\,]$ será normal a τ se $a\cos\eta + b\sin\eta = 0$, portanto $\delta = [-b\tan\eta;\, b, c, d\,]$, que é tipo espaço.] De modo semelhante se mostra que somente direções λ e σ podem ser normais a uma λ, e que direções de quaisquer tipos podem ser normais a uma σ.

É fácil perceber que todo vetor pode ser decomposto em diferentes somas de dois outros vetores, de quaisquer tipos, iguais ou diferentes. Mas temos uma provável surpresa para você: em decomposições $\tilde{\lambda_3} = \tilde{\lambda_1} + \tilde{\lambda_2}$, os três vetores tipo luz são necessariamente colineares. [Com efeito, sejam $\tilde{\lambda}_1 := k_1[1;\, \vec{\lambda_1}\,]$ e $\tilde{\lambda}_2 := k_2[1;\, \vec{\lambda_2}\,]$, com $|\vec{\lambda_1}| = 1$ e $|\vec{\lambda_2}| = 1$. Então $\tilde{\lambda}_3 = [k_1 + k_2;\, k_1\vec{\lambda_1} + k_2\vec{\lambda_2}]$, que por ser tipo luz implica $(k_1 + k_2)^2 = |k_1\vec{\lambda_1} + k_2\vec{\lambda_2}|^2$, ou seja, $1 = \vec{\lambda_1} \cdot \vec{\lambda_2}$; portanto $\vec{\lambda_1} = \vec{\lambda_2}$, implicando $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_2$ serem colineares, no que $\tilde{\lambda_3}$ os acompanhará.]

3 Colorindo as direções

Para facilitar a visualização dos subespaços do R^4, vamos colorir suas direções como num arco-íris. A direção t ($T = 1$) será azul, as λ ($T = 0$) serão amarelas, e as intermediárias τ serão verdes com tonalidades variando do azul ao amarelo. Completando, as direções σ terão cor laranja, com nuances entre amarelo e vermelho ($T = -1$). Veja a Figura 1.

4 O símbolo ∞^n

O espaço R^4 contém uma infinidade de vetores, cada um sendo especificado por 4 parâmetros com variação contínua. Então, *loosely speaking*, diremos que R^4 contém ∞^4 vetores. Embora esta nomenclatura seja matematicamente *nonsense*, ela se revelará muito prática, e será fartamente usada neste texto. Para ajudar você a se acostumar com ela, assertamos que o R^4 contém ∞^3 direções τ, e ∞^2 direções λ, e ∞^3 direções σ.

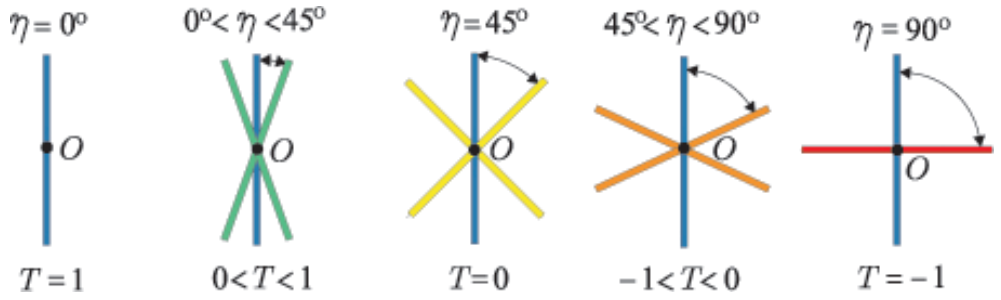

Figura 1: Direções no R^4, estendendo-se até o infinito radial. Note que $T = \tan(45^o - \eta)$.

A propósito, talvez você já se tenha perguntado se no R^4 existem mais vetores $\tilde{\tau}$ que $\tilde{\sigma}$, ou o contrário; bem, uns cálculos de volumes quadridimensonais indicam que há mais direções σ que τ, na razão $(\pi + 2)/(\pi - 2) \approx 9/2$.

5 Os subespaços R^2

Constroi-se um subespaço bidimensional R^2 selecionando 2 vetores não-colineares do R^4, $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$, e coletando os vetores $\alpha\tilde{a} + \beta\tilde{b}$, com $-\infty < \{\alpha, \beta\} < \infty$. Subespaços bidimensionais se apresentam como planos passando pela origem O do R^4; então aqui abreviamos a longa expressão 'subespaço vetorial bidimensional real' para *plano*, simplesmente.

Em todo plano (exceto naqueles com $T = -1$), a direção angularmente mais próxima da direção t é única, e será chamada *eixo* do plano. Conforme o ângulo η entre o eixo e t seja $<$, $=$ ou $>$ 45°, teremos plano tipo tempo τ^2, tipo luz λ^2 ou tipo espaço σ^2, respectivamente. Chamaremos η de *ângulo do plano*, e denotaremos R^2_T um plano cujo eixo tenha temporalidade T. Os planos R^2_{-1} não têm direção preferencial, todas as suas direções têm $T = -1$.

A Figura 2 expõe 5 planos paradigmáticos. Ali você vê que os τ^2 contêm uma infinidade ∞^1 de direções τ e σ, e somente 2 direções λ. Um λ^2 obviamente não contém direções τ; ele contém 1 única direção λ (seu eixo) e uma infinidade ∞^1 de direções σ. Completando, um σ^2 contém ∞^1 direções somente σ.

5.1 Determinação do tipo de um plano

Esta dedução é bem conhecida na literatura; reproduzimo-la aqui por completeza, e por ser simples. O tipo de um plano pode ser descoberto a partir de qualquer par $\{\tilde{a}, \tilde{b}\}$ de seus vetores, não-colineares, bastando calcular-se a *quantidade* de direções tipo luz do plano. Com efeito, suponha que a direção $[a_0 + mb_0; \vec{a} + m\vec{b}]$ seja tipo luz, portanto obedeça

$$(a_0 + mb_0)^2 = |\vec{a} + m\vec{b}|^2 . \tag{5}$$

Escrevamos (5) do modo $Am^2 + Bm + C = 0$, onde

$$A := (b_0)^2 - |\vec{b}|^2, \quad B := 2(a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}), \quad C := (a_0)^2 - |\vec{a}|^2 , \tag{6}$$

e busquemos a quantidade de diferentes soluções reais para m naquela equação. Essa quantidade depende somente do *sinal* do discriminante $\Delta := B^2 - 4AC$; se $\Delta > 0$, existirão 2 valores reais diferentes para m que satisfaçam (5), e teremos um τ^2. Se porém $\Delta = 0$, haverá somente 1 solução distinta real para m, e teremos um λ^2. Finalmente, se $\Delta < 0$, não haverá solução real para m, e ocorrerá um σ^2.

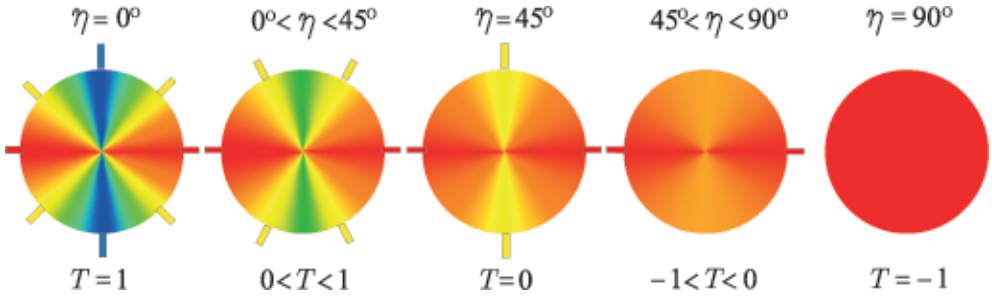

Figura 2: Os cinco planos paradigmáticos, estendendo-se até o infinito radial. No disco $T = 1$ somente 1 direção é azul, e no disco $T = 0$ somente 1 direção é amarela; todo disco $T \neq -1$ contém somente 1 direção vermelha. O disco $T = -1$ é inteiramente vermelho.

5.2 Determinação do eixo de um plano

Seja o plano contendo os vetores não-colineares $[a_0;\, \vec{a}\,]$ e $[b_0;\, \vec{b}\,]$; a direção m do plano é

$$[a_0 + mb_0;\, \vec{a} + m\vec{b}\,]. \tag{7}$$

O ângulo $0^o \leq \omega \leq 90^o$ entre a direção m e a direção t é dado por

$$\tan\omega = \frac{|\vec{a} + m\vec{b}\,|}{|a_0 + mb_0|}\,, \tag{8}$$

e ω será mínimo quando m satisfizer $\partial(\tan\omega)/\partial m = 0$. Alguns cálculos dão

$$m = -\frac{\vec{a}\cdot\vec{C}}{\vec{b}\cdot\vec{C}}\ \ ,\ \ \text{sendo}\ \ \vec{C} := a_0\vec{b} - b_0\vec{a}\,; \tag{9}$$

este resultado, levado à (7), finalmente dá o eixo

$$[\vec{C}\cdot\vec{C}\,;\, \vec{C}\times(\vec{a}\times\vec{b}\,)]\,. \tag{10}$$

En passant, encontramos o valor $0^o \leq \eta \leq 90^o$ do ângulo do plano:

$$\tan\eta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}\,|}{|a_0\vec{b} - b_0\vec{a}\,|}\,, \tag{11}$$

indicando que se tem $\{\tau^2, \lambda^2, \sigma^2\}$ conforme $|\vec{a}\times\vec{b}\,|\ \ \{<, =, >\}\ \ |a_0\vec{b} - b_0\vec{a}\,|$.

5.3 Normalidade entre planos

Relembre-se que dois subespaços de um mesmo espaço são ditos (mutuamente) normais quando *todas* as direções de um forem normais a todas as do outro.

No R^4, há somente 1 plano normal a um plano dado. [Com efeito, é fácil perceber que, mediante apropriada rotação dos eixos $\{x, y, z\}$, todo plano pode ser expresso do modo $R^2 := [\alpha\cos\eta;\, \alpha\sin\eta,\, \beta,\, 0\,]$. E é também fácil perceber que há somente 1 plano, $R^{2'} := [\gamma\sin\eta;\, -\gamma\cos\eta,\, 0,\, \delta\,]$, que é normal àquele R^2.]

Note que $T(R^{2'}) = -T(R^2)$; em consequência, no R^4 a quantidade de τ^2 e σ^2 é a mesma.

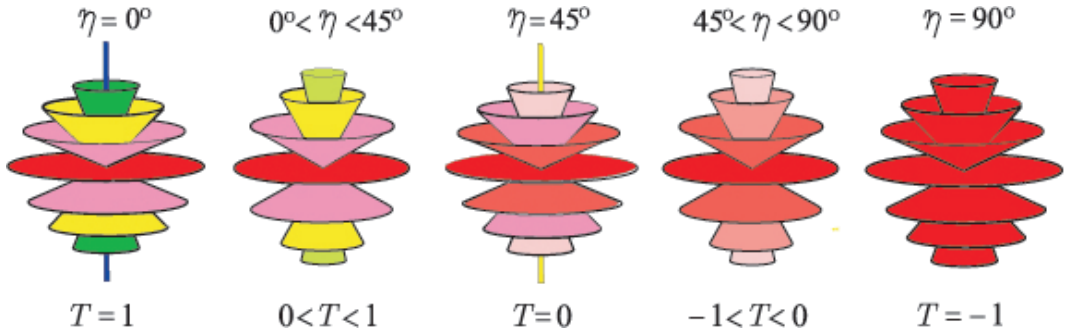

Figura 3: Os 5 triespaços paradigmáticos; os cones se estendem indefinidamente. O triespaço $T = 1$ contém 1 única direção azul, o $T = 0$ contém 1 única direção amarela, e o $T = -1$ é inteiramente vermelho. Todos contêm um plano vermelho.

5.4 Interseção de planos

No R^4, dois planos escolhidos ao acaso geralmente têm em comum somente o vetor $\tilde{0}$; este fato será facilmente percebido na Seção 7. Para determinar uma interseção de planos, resolvemos um sistema de 4 equações lineares homogêneas para 4 variáveis.

Por exemplo, buscando $[\alpha;\, \beta,\, \alpha+\beta,\, \alpha-\beta] \cap [\gamma;\, \delta,\, \gamma-\delta,\, \delta-\gamma\,]$ escrevemos as equações $\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta, \quad \alpha+\beta = \gamma-\delta\,, \quad \alpha-\beta = \delta-\gamma,$ cuja solução é $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, indicando o vetor $\tilde{0}$.

Em raros casos ocorre a interseção de planos ser uma direção. Por exemplo, buscando $[\alpha;\, \beta,\, \alpha+\beta,\, \alpha-\beta] \cap [\gamma;\, \delta,\, \gamma-2\delta,\, \gamma+3\delta\,]$ escrevemos as equações $\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta,$ $\alpha+\beta = \gamma-2\delta\,, \quad \alpha-\beta = \gamma+3\delta,$ cuja solução é $\alpha = \gamma,\ \beta = \delta = 0$, indicando a direção $[1;\, 0,\, 1,\, 1\,]$.

6 Subespaços R^3

Construímos um subespaço vetorial 3–dimensional real R^3 – doravante simplesmente *triespaço* – selecionando 3 vetores $\{\tilde{a},\, \tilde{b},\, \tilde{c}\}$ do quadriespaço R^4, linearmente independentes, e coletando os vetores $\alpha\tilde{a} + \beta\tilde{b} + \gamma\tilde{c}$, com $-\infty < \{\alpha, \beta, \gamma\} < \infty$.

Em todo triespaço, exceto no familiar $\{x, y, z\}$ cartesiano, a direção angularmente mais próxima à direção t é única, e será dita *eixo* do triespaço. [A exceção $\{x, y, z\}$ não tem direção especial; todas suas ∞^2 direções são normais a t.] O ângulo η entre o eixo e t será dito *ângulo do triespaço*. Definimos temporalidade T de um triespaço R^3_T como a do seu eixo.

A recíproca é verdadeira: toda direção de R^4 (exceto t) é eixo de um único triespaço. [A exceção t é eixo de ∞^2 triespaços, aqueles que contêm t e algum dos ∞^2 planos com $T = -1$.] Estes assertos serão visualmente constatados na Seção 7.

Classificamos os triespaços do mesmo modo que os planos: tipo tempo τ^3, que contêm direções dos 3 tipos; tipo luz λ^3, que contêm 1 única direção λ e ∞^2 direções σ; e tipo espaço σ^3, que contêm somente direções σ.

Em um triespaço, seja um cone circular cujo eixo é o do triespaço, e cujo vértice é a origem $\tilde{0}$. Cálculos mostram que todas as geratrizes do cone formam um mesmo ângulo ω com a direção t. [Este contraintuitivo fato será visualmente constatado na Seção 7.] Em consequência, todo triespaço é folheado mediante cones circulares unicoloridos, coaxiais e com vértice na origem $\tilde{0}$. Veja a Figura 3. Sendo η o ângulo do triespaço, e sendo ψ a semiabertura do cone, o ângulo ω é dado por $\cos\omega = \cos\eta\cos\psi$.

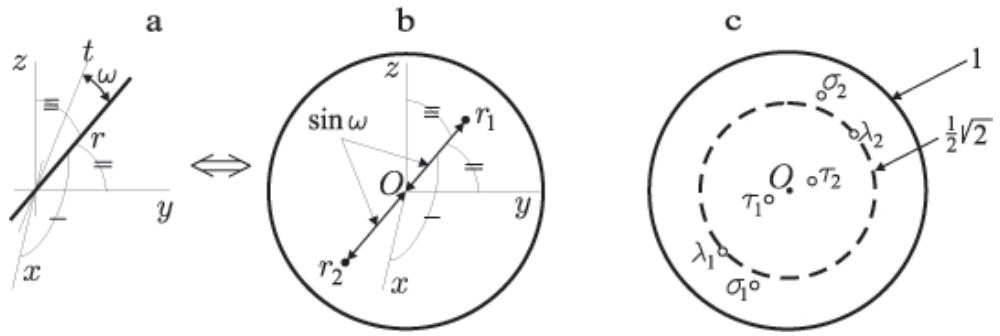

Figura 4: **a**: No espaço R^4 com eixos $\{t; x, y, z\}$, veja a direção r formando ângulo $0^o \leq \omega \leq 90^o$ com a direção temporal t.

b: Na bola B^3, com coordenadas $\{x, y, z\}$ veja o par de pontos $\{r_1, r_2\}$, imagem da direção r.

c: Em uma seção máxima da bola B^3 com raio 1, veja imagens $\{\tau_1, \tau_2\}$, $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ e $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ de direções tipo tempo, luz e espaço, respectivamente.

6.1 Normalidade entre triespaços e direções

É fácil perceber-se que, mediante apropriada orientação dos eixos $\{x, y, z\}$, todo triespaço pode ser expresso como $R^3 := [\alpha \cos\eta;\, \alpha \sin\eta,\, \gamma,\, \delta\,]$. É também fácil mostrar-se que há somente 1 direção, $N := \beta[\sin\eta;\, -\cos\eta,\, 0,\, 0\,]$, normal àquele triespaço. Concluímos que todo triespaço tem 1 única direção que lhe seja normal. E notamos que $T(N) = -T(R^3)$, implicando o ângulo η do R^3 e o ângulo da direção normal serem complementares.

Dada uma direção N, o conhecimento do triespaço R^3 que lhe é normal é muito útil, porque toda direção normal ou plano normal àquela N está contida naquele R^3.

Note que a relação bijetiva $R^1_{\tau,\sigma} \Leftrightarrow R^3_{\sigma,\tau}$ implica haverem no R^4 mais τ^3 que σ^3, na razão $(\pi + 2)/(\pi - 2) \approx 9/2$. Implica também haverem ∞^3 triespaços τ^3, e ∞^2 triespaços λ^3, e outros ∞^3 triespaços σ^3; estas informações constam do final da última linha da Tabela 1.

7 Um modelo 3–dimensional

Nossa mente percebe sem dificuldade os espaços 1–, 2–, e 3–dimensionais. Mas ela reluta em aceitar certos fatos referentes a espaços com mais dimensões. Por exemplo, não é fácil perceber que uma dada direção no R^4 é normal a uma infinita quantidade (∞^2) de planos; ou que as geratrizes de certos cones circulares sejam equidistantes de ∞^1 diferentes direções. Dificuldades como essa serão esvaídas pelo modelo a seguir.

Vamos mapear elementos do R^4 em uma bola 3–dimensional B^3 com raio 1. Uma direção em R^4 será mapeada como um par de pontos na B^3; precisamente,

$$[\cos\omega;\, \vec{r}\,\sin\omega\,] \Rightarrow \pm\,\vec{r}\sin\omega\,, \quad 0^o \leq \omega \leq 90^o\,, \quad |\vec{r}\,| = 1\,. \tag{12}$$

Diremos que o *par* de pontos é a *imagem* da direção. Veja as Figuras 4 **a** e 4 **b**.

A separação entre os pontos de uma imagem cresce com o ângulo ω que a contra-imagem forma com t. Assim, a imagem de uma direção τ (ou σ) é interior (ou exterior) a uma esfera 2–dimensional com raio $\sqrt{2}/2$, e a imagem de uma λ está naquela esfera. Veja a Figura 4 **c**.

Em particular, a imagem da direção t está (duplicadamente) no centro O da bola, e a imagem de uma direção $[0;\, \vec{r}\,]$ é o par de pontos $\pm\vec{r}\,/|\vec{r}\,|$, na borda da bola.

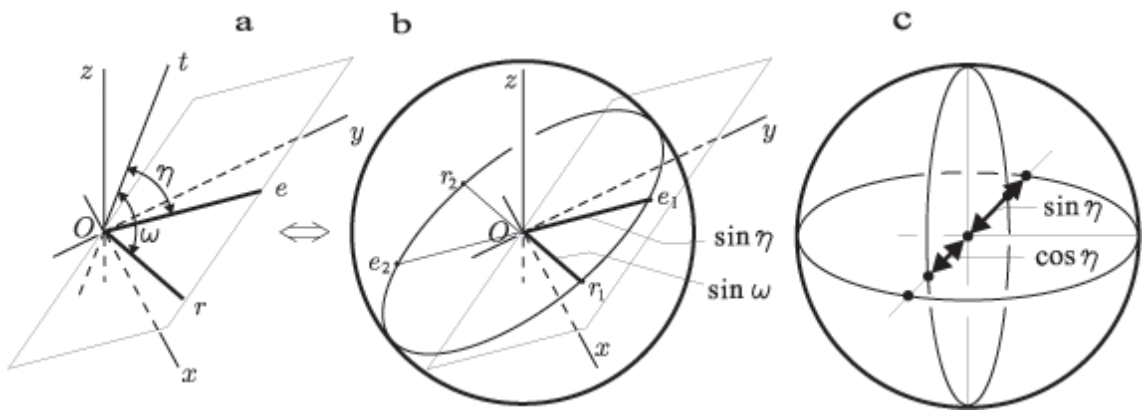

Figura 5: **a:** No R^4 com eixos $\{t; x, y, z\}$, um plano com eixo e, e uma direção genérica r no plano.
b: Na bola B^3 com coordenadas $\{x, y, z\}$, os pares de pontos $\{e_1, e_2\}$ e $\{r_1, r_2\}$, imagens de e e r, respectivamente, e a elipse com semieixos $\{1, \sin\eta\}$, imagem do plano de **a**.
c: Na bola B^3, imagens de 2 planos normais no R^4.

A imagem de um plano do R^4 é o conjunto das imagens das direções do plano; esse conjunto forma uma elipse com semieixos $\{1, \sin\eta\}$, onde η é o ângulo do plano. Veja as Figuras 5 **a** e **b**.

Em particular, a imagem de um plano que contenha a direção t se contrai a um diâmetro da bola; precisamente, $[\alpha; \beta\vec{r}] \Rightarrow$ diâmetro (da bola, e duplicado) contendo $\vec{r}$.

Sabemos que, no R^4, um plano é normal a 1 único outro plano; as imagens deles na B^3 são elipses com semieixos $\{1, \sin\eta\}$ e $\{1, \cos\eta\}$, situadas em planos geométricos perpendiculares, com os semieixos menores compartilhando uma mesma reta. Veja a Figura 5 **c**.

A imagem de um triespaço de R^4 é um esferoide oblato centrado na origem O, com semieixos $\{1, 1, \sin\eta\}$, onde η é o ângulo do triespaço. O par de pontos imagem do eixo e o par imagem da direção normal ao triespaço são colineares; veja a Figura 6 **a**.

Em particular, a imagem do triespaço $\{x, y, z\}$ é a esfera $|\vec{r}| = 1$, a borda da bola B^3. E a imagem do triespaço normal a $[0; \vec{r}]$ é o disco (duplicado) com raio 1 e perpendicular a $\vec{r}$.

Falta descrevermos as imagens dos ∞^4 cones circulares com temporalidade constante existentes no R^4. Cada imagem é um par de círculos paralelos, cujo mesmo eixo normal contém a origem da bola B^3; assim, todos os pontos de um dado círculo distam igualmente $\sin\omega$ da origem de B^3, onde ω se relaciona à temporalidade T do cone segundo $T = \tan(45^o - \omega)$. Veja a Figura 6 **c**.

Em particular, a imagem do cone de luz de um triespaço τ jaz na esfera 2–dimensional com centro na origem de B^3, e com raio $\sqrt{2}/2$. A Figura 6 **a** deixa claro que somente 1 triespaço pode acomodar um dado cone com temporalidade constante.

8 Subespaços de um subespaço

A Tabela 1 indica quantos subespaços, e de que tipo, estão contidos em um dado subespaço do R^4. Por exemplo, a quadrícula A indica que um plano τ^2 contém duas direções λ (indicadas $\bullet\bullet$). E a quadrícula B indica que um triespaço λ^3 contém ∞^2 planos σ^2. Relembre-se, a notação ∞^n, usada para as quantidades infinitas, foi definida na Seção 4.

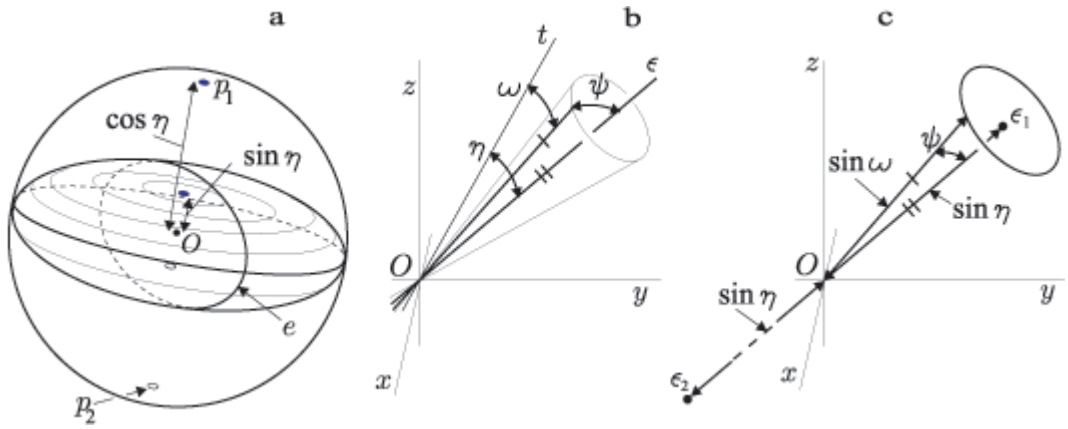

Figura 6: **a:** Na bola B^3, a imagem de um triespaço com temporalidade $T = \tan(45^o - \eta)$ é um esferoide com semieixos $\{1,\ 1,\ \sin\eta\}$; o equador do esferoide percorre a borda da bola; a imagem de um cone com temporalidade constante, contido no triespaço, é um par de círculos diametralmente opostos no esferoide; a elipse e é imagem de um plano do triespaço, e o par de pontos $\{p_1, p_2\}$ é a imagem da direção normal ao triespaço.
b: No R^4 com eixos $\{t, x, y, z\}$, a direção ϵ é eixo de um triespaço, e de um cone circular com semiabertura ψ, contido no triespaço; todas as geratrizes do cone formam um mesmo ângulo ω com a direção t, embora a figura 4–dimensional pareça contradizê-lo; ocorre $\cos\omega = \cos\eta\cos\psi$.
c: Na bola B^3 com eixos $\{x, y, z\}$, o par de pontos $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ é a imagem da direção ϵ no R^4, e dista $\sin\eta$ da origem O; o círculo é metade da imagem do cone desenhado em **b**; todo ponto do círculo dista $\sin\omega$ da origem, sendo $\omega \geq \eta$.

9 Subespaços normais

No espaço R^4 nossa intuição às vezes tem dificuldade em descobrir quantos subespaços são normais a um dado subespaço. Mas há um fato que muito facilita essa descoberta: todos os subespaços normais a um dado subespaço estão contidos no subespaço complementar ao subespaço dado. No R^4 os pares de subespaços complementares sabidamente são $\{R^1_T,\ R^3_{-T}\}$ e $\{R^2_T,\ R^2_{-T}\}$, onde T é temporalidade.

Então, por exemplo, os possíveis subespaços normais a uma direção τ_1 são aqueles contidos no correspondente triespaço normal σ^3_{-1}. Estes são encontrados na linha σ^3 da Tabela 1, quais sejam: o vetor zero $\tilde{0}$, uma quantidade ∞^2 de σ_{-1}, outra quantidade ∞^2 de σ^2_{-1}, e o σ^3_{-1} inteiro.

A Tabela 2 informa quantos subespaços são normais a um dado subespaço; no exemplo dado acima, aquelas quantidades estão na linha τ. Sem surpresa, as linhas da Tabela 2 são as mesmas da Tabela 1, na sequência inversa.

Às vezes nos perguntamos em quantos subespaços, e de quais tipos, um dado subespaço do R^4 é encontrado. A Tabela 3 dá as respostas. Note que as linhas da Tabela 3 coincidem com as da Tabela 1, na sequência inversa. Note também que as colunas da Tabela 3 coincidem com as da Tabela 2, na ordem inversa.

A Tabela 4 repete, de modo camuflado, as informações da Tabela 1; ela foi incluída para completar uma formação simétrica iniciada pelas outras Tabelas. Suas linhas são as da Tabela 1 em ordem inversa, e suas colunas são as da Tabela 3, na sequência inversa.

Tabela 1

... $\infty\square$ *destes subespaços*

Este subespaço contém ...

	$\tilde{0}$	τ	λ	σ	τ^2	λ^2	σ^2	τ^3	λ^3	σ^3	R^4
$\tilde{0}$	•										
τ	•	•									
λ	•		•								
σ	•			•							
τ^2	•	1	A ••	1	•						
λ^2	•		•	1		•					
σ^2	•			1			•				
τ^3	•	2	1	2	2	1	2	•			
λ^3	•		•	2		1	2^B		•		
σ^3	•			2			2			•	
R^4	•	3	2	3	4	3	4	3	2	3	•

Tabela 2

... $\infty\square$ *destes subespaços*

Este subespaço é normal a ...

	$\tilde{0}$	τ	λ	σ	τ^2	λ^2	σ^2	τ^3	λ^3	σ^3	R^4
$\tilde{0}$	•	3	2	3	4	3	4	3	2	3	•
τ	•			2			2			•	
λ	•		•	2		1	2		•		
σ	•	2	1	2	2	1	2	•			
τ^2	•			1			•				
λ^2	•		•	1		•					
σ^2	•	1	••	1	•						
τ^3	•			•							
λ^3	•		•								
σ^3	•	•									
R^4	•										

Tabela 4

... $\infty\square$ *complementares destes subespaços*

Este subespaço contém ...

	$\tilde{0}$	τ	λ	σ	τ^2	λ^2	σ^2	τ^3	λ^3	σ^3	R^4
$\tilde{0}$											•
τ										•	•
λ									•		•
σ								•			•
τ^2							•	1	••	1	•
λ^2						•		1	•		•
σ^2					•			1			•
τ^3				•	2	1	2	2	1	2	•
λ^3			•		2	1		2	•		•
σ^3		•			2			2			•
R^4	•	3	2	3	4	3	4	3	2	3	•

Tabela 3

... $\infty\square$ *destes subespaços*

Este subespaço é comum a ...

	$\tilde{0}$	τ	λ	σ	τ^2	λ^2	σ^2	τ^3	λ^3	σ^3	R^4
$\tilde{0}$	•	3	2	3	4	3	4	3	2	3	•
τ		•			2			2			•
λ			•		2	1		2	•		•
σ				•	2	1	2	2	1	2	•
τ^2					•			1			•
λ^2						•		1	•		•
σ^2							•	1	••	1	•
τ^3								•			•
λ^3									•		•
σ^3										•	•
R^4											•