

Curvaturas e torções, sem maiores pretensões

Curvatures and torsions, it's show time

F.M. Paiva*

*Departamento de Física, U.E. Humaitá II, Colégio Pedro II,
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil*

A.F.F. Teixeira†

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil

Resumo: Começamos apresentando de modo claro a matemática relacionada a curvas em um plano euclidiano; visitamos evoluta e involutas dessas curvas, e seus círculos osculadores. Depois, no espaço tridimensional euclidiano, estudamos curvaturas e torções de linhas; descrevemos o triedro movente, as fórmulas de Serret-Frenet, o vetor de Darboux, indicatrizes esféricas, esfera osculadora, e curvas esféricas. No final, estudamos com detalhe a geometria do sacarrolha usual.

Palavras chave: curvatura, torção, Serret-Frenet, indicatriz esférica, curva esférica.

Abstract: We make a clear presentation of the mathematics related to curves in Euclidean plane; we visit evolute and involutes, and osculating circles. We also study curvature and torsion of lines in Euclidean tridimensional space; we describe moving trihedron, Serret-Frenet formulas, Darboux vector, spherical indicatrices, osculating sphere, and spherical curves. We finally study with detail the geometry of the usual corkscrew.

Keywords: curvature, torsion, Serret-Frenet, spherical indicatrix, spherical curve.

1. INTRODUÇÃO

Muitas vezes, relendo sobre curvas e superfícies, sentimos reviver nossa satisfação pela companhia da geometria. Tópicos meio esquecidos, tais como curvatura e torção de linhas no espaço euclidiano, triedro movente e sua 'velocidade' angular, envolventes, evolutas, involutas, ..., todos são lembrados com prazer. Nós apostamos que você, se for físico ou engenheiro como nós, também ficará feliz ao rever esses itens; eles fizeram parte da nossa formação, em épocas em que tudo tínhamos que absorver às carreiras, com pouco tempo para degustar os novos conceitos. Nesta despretençiosa monografia nós procuramos dar uma descrição amena

daqueles tópicos.

É frequente, em textos como este, iniciar-se a apresentação pelas linhas reversas, e vez por outra especializar-se para as linhas planas. Entretanto há, nas linhas planas orientadas (jacentes em uma superfície também orientada, enfatize-se), um importante conceito que inexistente nas linhas reversas: o da *curvação* K . Ela difere da mais conhecida *curvatura* κ , por ter um bem definido sinal algébrico. Esperamos que tal fato justifique a sequência inversa seguida neste texto.

2. LINHAS PLANAS

Imagine um plano, com eixos coordenados ortogonais $[0; x, y]$ providos de marcações equidistantes unitárias; e represente como \hat{x} e \hat{y} os vetores unitários paralelos àqueles eixos. Então a posição \vec{r} de um ponto no plano é indicada

*Electronic address: prof.fmpaiva@gmail.com

†Electronic address: teixeira@cbpf.br

como

$$\vec{r} := x\hat{x} + y\hat{y}; \quad (1)$$

como é usual, uma flecha indica vetor, e um circunflexo indica vetor unitário adimensional. Ainda, dote o plano com orientação positiva no sentido anti-horário, como indicado na figura 1 a.

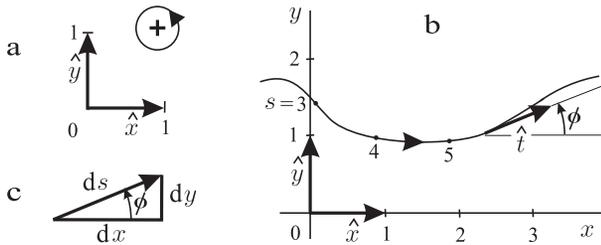


Figura 1: a: Orientação angular do plano $[x,y]$.

b: Curva plana, parametrizada por distâncias, com um vetor unitário \hat{t} (tangente) definido em cada ponto.

c: Relações $dx/ds = \cos \phi$ e $dy/ds = \sin \phi$.

2.1. Curva parametrizada por comprimento

Considere uma linha no plano $[x,y]$. Marque separações unitárias ao longo da linha, mediante um parâmetro s de comprimento. Estando parametrizada, a linha é promovida a *curva*; expressemo-la do modo $\vec{r}(s)$, ou $[x(s),y(s)]$, e orientemo-la segundo o crescimento de s . Permitamo-nos designar sucintamente como ponto s , aquele ponto da curva com coordenadas $[x(s),y(s)]$.

Como $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, se vê que

$$x_s^2 + y_s^2 = 1, \Rightarrow x_s x_{ss} + y_s y_{ss} = 0, \quad (2)$$

onde cada s subscripto indica uma derivação d/ds ; ou seja,

$$\hat{r}_s := d\vec{r}/ds, \quad x_s := dx/ds, \quad x_{ss} := dx_s/ds, \dots \quad (3)$$

E como $r_{s\dots s} = x_{s\dots s}\hat{x} + y_{s\dots s}\hat{y}$, é claro que

$$\begin{aligned} |r_{s\dots s}^{\vec{}}|^2 &:= r_{s\dots s}^{\vec{}} \cdot r_{s\dots s}^{\vec{}} = x_{s\dots s}^2 + y_{s\dots s}^2, \\ |r_{s\dots s}^{\vec{}}|^n &:= \left(\sqrt{x_{s\dots s}^2 + y_{s\dots s}^2} \right)^n; \end{aligned} \quad (4)$$

a propósito, neste texto a operação raiz quadrada é aplicada somente a quantidades não-negativas, e sempre dará uma quantidade tampouco negativa.

Um alerta: não podemos arbitrar duas funções reais quaisquer, $x(s)$ e $y(s)$, e ingenuamente presumir que elas representem uma curva plana; por s ser parâmetro de comprimento, as funções precisam previamente obedecer a equação (2a).

Convém ter à mão alguns resultados úteis de produtos escalares de \hat{r}_s com derivadas superiores $r_{ss}^{\vec{}}$, $r_{sss}^{\vec{}}$, \dots ; cada resultado é obtido por derivação d/ds do resultado anterior:

$$\begin{aligned} \hat{r}_s \cdot \hat{r}_s &= 1, \quad \hat{r}_s \cdot r_{ss}^{\vec{}} = 0, \\ \hat{r}_s \cdot r_{sss}^{\vec{}} &= -|r_{ss}^{\vec{}}|^2, \quad \hat{r}_s \cdot r_{ssss}^{\vec{}} = -3 r_{ss}^{\vec{}} \cdot r_{sss}^{\vec{}}. \end{aligned} \quad (5)$$

2.2. A curvatura K

No estudo das *linhas orientadas* em um *plano orientado*, convém definir $K(s)$, a função *curvatura* da curva; diferentemente da função curvatura $\kappa(s) \geq 0$ a ser apresentada na seção 2.6, em cada ponto s a curvatura $K(s)$ pode ser também negativa.

A curvatura $K(s)$ indica a intensidade do desvio da linha orientada para a esquerda ou para a direita em cada ponto s . Sua definição é (veja a figura 1 b)

$$K := \frac{d\phi}{ds} \equiv \phi_s; \quad (6)$$

a dimensão de K é portanto ângulo por distância. Vê-se que $K > 0$ se a curva plana se volta para a esquerda enquanto s cresce, e se vê que $K < 0$ no caso contrário.

Para termos a curvatura $K(s)$ em termos de $\vec{r}(s)$ e suas derivadas, vemos na figura 1 c que

$$x_s = \cos \phi, \quad y_s = \sin \phi; \quad (7)$$

então $x_{ss} = -\phi_s \sin \phi$ e $y_{ss} = \phi_s \cos \phi$, que implicam $\phi_s = -x_{ss}/y_s = y_{ss}/x_s$. Finalmente, a definição (6) e alguma manipulação das eqs. (2) nos dá três expressões equivalentes para $K(s)$ de uma curva plana, e uma expressão para seu módulo:

$$K = \frac{y_{ss}}{x_s} = -\frac{x_{ss}}{y_s} = x_s y_{ss} - y_s x_{ss}, \quad |K| = |r_{ss}^{\vec{}}| \equiv \sqrt{x_{ss}^2 + y_{ss}^2}. \quad (8)$$

Todo pequeno trecho não reto de uma linha é aproximadamente um arco de círculo, denominado *círculo osculador* à linha em um ponto p do trecho (veja a figura 2 a). Costuma-se dizer que o círculo osculador contém 3 pontos da curva. O centro $[X(s),Y(s)]$ do círculo está no encontro de duas perpendiculares à linha na vizinhança do ponto p . Um metucioso exame de sinais nas figuras 2 a e 2 b mostra que as coordenadas do centro da curvatura são

$$X = x - \frac{y_s}{K} \equiv x - y_\phi, \quad Y = y + \frac{x_s}{K} \equiv y + x_\phi, \quad (9)$$

onde o subscripto ϕ indica derivação $d/d\phi$. Percebe-se na figura 2 a que o raio ρ do círculo osculador satisfaz $\rho^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 = 1/K^2$ e portanto é $\rho = 1/|K|$; e a figura 2 b evidencia que, consistentemente, $\rho = |s_\phi|$. *En passant*, as estranhas fórmulas $X-x = -y_\phi$ e $Y-y = x_\phi$ parecem ser novas na literatura.

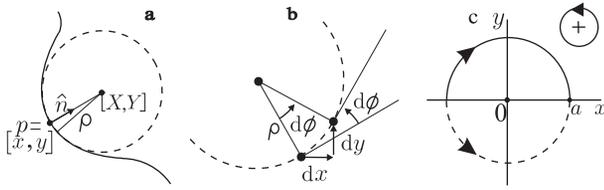


Figura 2: **a**: Duas perpendiculares a uma curva plana, em pontos vizinhos a um ponto $p = [x, y]$, marcam o centro $[X, Y]$ do círculo osculador à curva em p , com raio ρ .

b: Grandezas geométricas que justificam as eqs. (9).

c: Círculo $x^2 + y^2 = a^2$, representado pelas duas funções $y_{\pm}(x) := \pm\sqrt{a^2 - x^2}$; o semicírculo orientado superior tem curvatura K negativa, e o inferior, positiva.

2.3. Curva com parâmetro qualquer

Quando o comprimento s resulte pouco prático para parâmetro de uma dada linha, buscamos algum parâmetro real q mais apropriado. A curva plana é então descrita do modo $\vec{r}(q)$, ou $[x(q), y(q)]$, e convencionamos orientá-la pelo crescer de q .

O elemento de linha passa a ser

$$ds = \sqrt{x_q^2 + y_q^2} dq, \quad \Rightarrow \quad s_q = \sqrt{x_q^2 + y_q^2}, \quad (10)$$

em que um q subscrito indica uma derivação d/dq .

Como as funções $x(q)$ e $y(q)$ são conhecidas, também o é a função derivada $s_q(q)$; esta função, sempre positiva, permite fácil conversão das derivações d/ds , que estivemos usando até aqui, para as derivações d/dq , do modo

$$d/ds \rightarrow (dq/ds)d/dq \equiv (1/s_q)d/dq; \quad (11)$$

uso repetido da (11) nos dá algumas conversões de uso frequente:

$$\begin{aligned} \hat{r}_s &\rightarrow \vec{r}_q/s_q, \quad \vec{r}_{ss} \rightarrow \vec{r}_{qq}/s_q^2 - \vec{r}_q s_{qq}/s_q^3, \\ \vec{r}_{sss} &\rightarrow (1/s_q^3)\vec{r}_{qqq} - 3(s_{qq}/s_q^4)\vec{r}_{qq} + (3s_{qq}^2/s_q^5 - s_{qqq}/s_q^4)\vec{r}_q. \end{aligned} \quad (12)$$

E convém ter à mão duas relações simples, vindas da eq. (5), que simplificam longas expressões:

$$\vec{r}_q \cdot \vec{r}_q = s_q^2, \quad \vec{r}_q \cdot \vec{r}_{qq} = s_q s_{qq}. \quad (13)$$

Por exemplo, levando as eqs. (12) às eqs. (8) para a curvatura $K(s)$ obtemos várias expressões equivalentes para a função curvatura $K(q)$, e uma expressão para o raio da curvatura $\rho(q)$:

$$\begin{aligned} K &= \frac{s_q y_{qq} - y_q s_{qq}}{s_q^2 x_q} = \frac{x_q s_{qq} - s_q x_{qq}}{s_q^2 y_q} = \frac{x_q y_{qq} - y_q x_{qq}}{s_q^3}, \\ \rho &= \frac{s_q^2}{\sqrt{x_{qq}^2 + y_{qq}^2 - s_{qq}^2}}; \end{aligned} \quad (14)$$

em particular, o centro da curvatura (9) correspondente ao ponto $[x, y]$ da curva tem coordenadas agora dadas por

$$X = x - \frac{y_q}{K s_q}, \quad Y = y + \frac{x_q}{K s_q}. \quad (15)$$

2.4. Usando x como parâmetro

Podemos expressar uma linha plana também do modo $y(x)$, e orientá-la pelo crescimento de x . Esta convenção para orientação demanda algum cuidado. Por exemplo, se quisermos descrever o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ do modo $y(x)$, precisaremos de duas funções: uma das funções é $y_+(x) := \sqrt{a^2 - x^2}$, que representa um semicírculo com raio $a > 0$ e curvatura negativa $K = -1/a$, e a outra é $y_-(x) := -\sqrt{a^2 - x^2}$, que gera semicírculo com raio $a > 0$ e curvatura positiva $K = 1/a$. Veja a figura 2 **c**.

Formalmente as fórmulas (10)–(15) continuarão válidas, substituindo-se $q \rightarrow x$, e daí $x_q \rightarrow 1$ e $x_{qq} \rightarrow 0$. Em especial, o elemento de linha e a curvatura $K(x)$ agora são

$$ds = \sqrt{1 + y_x^2} dx, \quad K = \frac{y_{xx}}{\sqrt{(1 + y_x^2)^3}}, \quad (16)$$

onde um subscrito x indica derivação d/dx ; tem-se $K > 0$ se $y_{xx} > 0$, pois $y_{xx} > 0$ implica a linha se voltar para a esquerda ao crescer x , e tem-se $K < 0$ no caso da linha se voltar para a direita ao crescer x . O centro $[X(x), Y(x)]$ da curvatura correspondente ao ponto $[x, y(x)]$ da curva é

$$X = x - \frac{y_x(1 + y_x^2)}{y_{xx}}, \quad Y = y + \frac{1 + y_x^2}{y_{xx}}. \quad (17)$$

2.5. Vetores unitários tangente e normal

Para facilitar a descrição de várias propriedades de uma curva plana C , nós definimos dois vetores unitários especiais, $\hat{i}(s)$ e $\hat{n}(s)$, em cada ponto s de C .

Vetor unitário *tangente* no ponto $[x, y]$ é

$$\hat{i} := \hat{r}_s = [x_s, y_s], \quad \text{ou} \quad \hat{i} = x_s \hat{x} + y_s \hat{y}, \quad (18)$$

relembrando que \hat{x} e \hat{y} são vetores unitários fixos, como na figura 1 **a**. Vê-se que \hat{i} é orientado no sentido do crescimento de s , como a figura 3 **a** indica. Designando $[X, Y]$ as coordenadas de um ponto genérico da *reta tangente* à curva no ponto $[x, y]$, e como os vetores $[X - x, Y - y]$ e \hat{i} são paralelos ou antiparalelos, tem-se a equação da reta tangente (veja a figura 3 **a**):

$$\frac{X - x}{Y - y} = \frac{x_s}{y_s}. \quad (19)$$

Vetor unitário *normal* :

$$\begin{aligned}\hat{n} &:= \frac{d\hat{t}/ds}{|d\hat{t}/ds|} \equiv \frac{\vec{t}_s}{|\vec{t}_s|} \equiv \frac{\vec{r}_{ss}}{|\vec{r}_{ss}|} \equiv \rho \vec{r}_{ss} \equiv \rho (x_{ss}\hat{x} + y_{ss}\hat{y}) \\ &\equiv \varepsilon(-y_s\hat{x} + x_s\hat{y}),\end{aligned}\quad (20)$$

sendo $\rho := 1/|K| \geq 0$ o raio da curvatura e sendo ε o sinal da curvatura K . Note que o vetor $\vec{t}_s := d\hat{t}/ds$ não é unitário, ele tem módulo $|\vec{t}_s| = |K|$. O vetor \hat{n} é normal a \hat{t} , e sempre aponta para o centro do círculo osculador, como na figura 3 b. Perceba ainda que, ao longo de uma curva plana, a orientação relativa de \hat{n} e \hat{t} pode mudar, como na figura 3 c. A *reta normal* no ponto $[x, y]$ tem equação

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{y_{ss}}{x_{ss}} \quad (\equiv -\frac{x_s}{y_s}), \quad (21)$$

onde $[X, Y]$ agora são as coordenadas de um ponto qualquer da reta normal; a (21) é consequência de os vetores $[X - x, Y - y]$ e $\hat{n} = \rho [x_{ss}, y_{ss}]$ serem paralelos. Veja a figura 3 b.

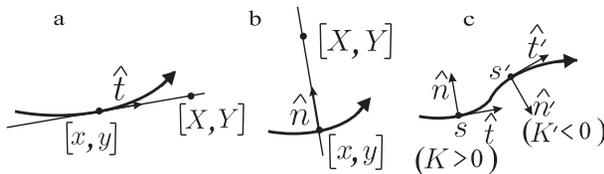


Figura 3: **a**: Reta tangente com pontos $[X, Y]$, suportando o vetor tangente \hat{t} no ponto $[x, y]$.

b: Reta normal com pontos $[X, Y]$, suportando o vetor normal \hat{n} no ponto $[x, y]$.

c: A orientação relativa de \hat{t} e \hat{n} em uma curva plana muda como o sinal da curvatura K .

Estes dois vetores unitários são muito úteis como base $[\hat{t}(s), \hat{n}(s)]$ de um espaço vetorial local: por exemplo, nessa base o círculo osculador no ponto s tem centro dado por $[0, \rho(s)]$, ou $\rho(s)\hat{n}(s)$, expressão muito mais simples que (9), (15), e (17); veja a figura 2 a.

2.6. A curvatura κ

Vamos definir curvatura $\kappa(s)$ como o inverso do raio da curvatura $\rho(s)$. Então temos para κ várias expressões equivalentes:

$$\kappa := 1/\rho \equiv |K| \equiv |\vec{t}_s| \equiv |\vec{r}_{ss}| \equiv |\phi_s|. \quad (22)$$

Portanto κ nunca é negativo. Olhando a eq. (20) vemos que

$$\vec{t}_s = \kappa \hat{n}. \quad (23)$$

Trabalhando esta equação nós vamos obter $\vec{n}_s(s)$, a derivada d/ds do vetor normal \hat{n} :

$$\begin{aligned}\vec{t}_s = \kappa \hat{n} &\Rightarrow \hat{n} = \frac{1}{\kappa} \vec{t}_s = \frac{1}{\kappa} [\cos \phi, \sin \phi]_s \\ &= \frac{1}{\kappa} [-\phi_s \sin \phi, \phi_s \cos \phi] = \frac{\phi_s}{|\phi_s|} [-\sin \phi, \cos \phi];\end{aligned}\quad (24)$$

como $\phi_s/|\phi_s|$ independe de s , a derivada d/ds de \hat{n} dá

$$\begin{aligned}\vec{n}_s &= \frac{\phi_s}{|\phi_s|} [-\phi_s \cos \phi, -\phi_s \sin \phi] \\ &= -\frac{|\phi_s|^2}{|\phi_s|} [\cos \phi, \sin \phi] = -|\phi_s| \hat{t}.\end{aligned}\quad (25)$$

Resumindo, para as curvas planas se tem

$$\vec{t}_s = \kappa \hat{n}, \quad \vec{n}_s = -\kappa \hat{t}. \quad (26)$$

2.7. Obtendo a curva plana a partir da curvatura

Conhecendo a função curvatura $\kappa(s)$ podemos obter o formato de uma curva plana. A rigor, o formato pode ser obtido somente em trechos da curva que não contêm $\kappa = 0$. Se quisermos também a orientação e localização da curva no plano $[x, y]$, precisamos também conhecer o vetor tangente \hat{t}_0 e o normal \hat{n}_0 à curva em algum ponto s_0 .

Com efeito, a curva pode ser conhecida na vizinhança de s_0 mediante uma série de potências da separação $s - s_0$:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(s_0) + (s - s_0) \hat{r}_s(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!} \vec{r}_{ss}(s_0) + \dots \quad (27)$$

Precisamos exprimir as constantes $\hat{r}_s(s_0)$, $\vec{r}_{ss}(s_0)$, \dots em termos de $\kappa(s_0)$ e suas derivadas $\kappa_s(s_0)$, $\kappa_{ss}(s_0)$, \dots .

Para tal, lembramos que em qualquer ponto s se tem $\hat{r}_s = \hat{t}$; então, usando repetidamente as equações $\vec{t}_s = \kappa \hat{n}$ e $\vec{n}_s = -\kappa \hat{t}$ nós obtemos, em qualquer ponto s ,

$$\hat{r}_s = \hat{t}, \quad \vec{r}_{ss} = \kappa \hat{n}, \quad \vec{r}_{sss} = -\kappa^2 \hat{t} + \kappa_s \hat{n}, \dots \quad (28)$$

Restringindo (28) ao ponto s_0 , a eq. (27) fica

$$\begin{aligned}\vec{r}(s) &= \vec{r}(s_0) + \delta \hat{t}_0 + \frac{\delta^2}{2!} \kappa \hat{n}_0 + \frac{\delta^3}{3!} (-\kappa^2 \hat{t}_0 + \kappa_s \hat{n}_0) + \dots, \\ \delta &:= s - s_0,\end{aligned}\quad (29)$$

onde a função κ e suas derivadas, bem como os vetores \hat{t}_0 e \hat{n}_0 , têm seus valores no ponto s_0 .

Como $\vec{r}(s) - \vec{r}(s_0)$ indica a posição do ponto s com relação ao ponto s_0 , podemos decompor a eq. (29) nas suas componentes na base $[\hat{t}_0, \hat{n}_0]$:

$$\vec{r}(s) - \vec{r}(s_0) = T(\delta) \hat{t}_0 + N(\delta) \hat{n}_0, \quad (30)$$

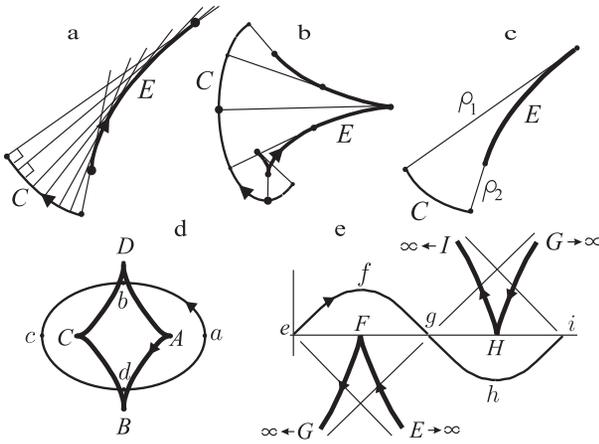


Figura 6: Evolutas. **a**: As normais a um arco C de linha plana configuram a evoluta E de C .

b: Os pontos do arco plano C onde a curvatura $\kappa(s)$ é extrema (máxima ou mínima) produzem cúspides na evoluta E .

c: Sendo C um arco plano em que a função raio da curvatura $\rho(s)$ não tenha extremo, o comprimento de sua evoluta E é $|\rho_2 - \rho_1|$.

d: Uma elipse e sua evoluta; as cúspides $\{A, B, C, D\}$ na evoluta correspondem aos pontos $\{a, b, c, d\}$ com curvatura extrema da elipse, respectivamente; A e C são interiores à elipse, mas não são focos; B e D podem ser interiores à elipse.

e: Parte de uma senóide e a evoluta dessa parte; os pontos $\{E, G, I\}$ da evoluta estão no infinito; eles correspondem aos pontos de inflexão $\{e, g, i\}$ da senóide.

2.10. Evoluta

Definimos evoluta de uma linha plana como a envolvente das retas normais à linha. Como duas retas vizinhas normais a uma linha se encontram no centro da curvatura, então, equivalentemente, evoluta de uma linha plana é o *locus* dos centros dos círculos osculadores da linha. Cada linha plana tem uma única evoluta. Ainda, toda linha plana é a evoluta de uma infinidade de outras linhas (suas involutas, a serem vistas na seção 2.11).

Um modo gráfico de obtermos a evoluta de uma linha plana C nos é sugerido pela figura 2 **a**, onde vemos que o centro da curvatura é a interseção de duas normais à linha: então desenhamos a família das retas normais a C ; a envolvente dessa família é a *evoluta* de C . Veja as figuras 6 **a** e 6 **b**. Note que a evoluta de um círculo se restringe a um ponto, o centro do círculo. Algumas evolutas têm formato bastante curioso, como a evoluta de uma elipse e a evoluta de uma senóide, mostradas nas figuras 6 **d** e 6 **e**.

Perceba que o comprimento infinitesimal $|ds_E|$ de um arco de evoluta vale $|\rho_s(s)ds|$, onde ds é o arco infinitesimal correspondente na curva C , e $\rho_s(s)$ é a derivada do raio da curvatura no ponto s . Considere agora um trecho da curva C em que a função raio da curvatura $\rho(s)$ não tenha extremo (máximo ou mínimo); então a figura 6 **c** evidencia que no correspondente trecho da evoluta E (que não conterá cúspide) ocorre $\Delta s_E = |\Delta\rho|$, isto é, o comprimento do trecho na evoluta é a diferença entre os comprimentos dos raios da curvatura inicial e final.

As evolutas podem ser obtidas também analiticamente, lembrando que são o *locus* dos centros da curvatura (seção 2), como nas duas seções a seguir.

2.10.1. Evoluta de elipse

Elipses têm evolutas dignas de atenção especial. Considere a elipse com equações

$$x(\varphi) = a \cos \varphi, \quad y(\varphi) = b \sin \varphi, \quad 0 < b < a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad (38)$$

calculamos $x_\varphi, y_\varphi, x_{\varphi\varphi}, y_{\varphi\varphi}$, que levados à eq. (10) nos dão

$$s_\varphi^2 = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi; \quad (39)$$

a curvatura da elipse é obtida da eq. (14), que dá $K(\varphi) = ab/s_\varphi^3$. Finalmente, a evoluta da elipse vem das eqs. (15), com $c := \sqrt{a^2 - b^2}$ (veja a figura 6 **d**):

$$\begin{aligned} X(\varphi) &= \frac{c^2}{a} \cos^3 \varphi, & Y(\varphi) &= -\frac{c^2}{b} \sin^3 \varphi, \\ (aX)^{2/3} + (bY)^{2/3} &= c^{4/3}. \end{aligned} \quad (40)$$

2.10.2. Evoluta da cicloide

A cicloide tem como evoluta outra cicloide, congruente, como veremos. Sejam

$$x(\varphi) = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y(\varphi) = a(1 - \cos \varphi) \quad (41)$$

as equações da cicloide (veja a figura 7). Calculamos $x_\varphi, y_\varphi, x_{\varphi\varphi}, y_{\varphi\varphi}$, e então as equações (13a) e (14c) nos dão

$$s_\varphi = 2a \sin \varphi / 2, \quad K = -\frac{1}{4a \sin \varphi / 2}. \quad (42)$$

As equações da evoluta são então obtidas da eq. (15),

$$X(\varphi) = a(\varphi + \sin \varphi), \quad Y(\varphi) = -a(1 - \cos \varphi), \quad (43)$$

e são uma nova cicloide, mostrada também na figura 7.

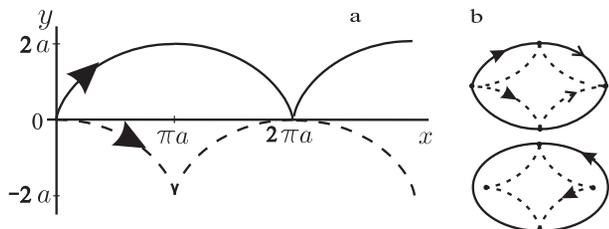


Figura 7: **a**: Em linha cheia, a cicloide com equação (41), no trecho $0 < \varphi < 3\pi$; em linha tracejada, a correspondente evoluta (43). A curvatura κ (42) da cicloide (41) é infinita em $\varphi = 2n\pi$ com n inteiro.

b: Em cima, uma cicloide e sua cópia invertida, com as respectivas evolutas; as cúspides das evolutas estão nas cicloides originais. Em baixo, uma elipse com mesmas dimensões, e sua evoluta, para comparação; as cúspides no eixo maior não estão na elipse.

2.11. Involutas

Como o nome insinua, *evolventes* (ou *involutas*) de uma curva plana C seriam especiais linhas que evolvessem de C ; veja-se, por exemplo, partes de involutas de um círculo, as espirais na figura 8 **a**.

Vamos usar a seguinte definição: involuta de uma curva plana C é toda linha que parta ortogonalmente de C e incida perpendicularmente nas retas tangentes a C (figuras 8 **b**, **c**, **d**). Essa definição parece capacitar duas involutas para cada ponto *interior* de C ; entretanto esses dois pedaços podem ser parametrizados com valor zero no encontro (formando geralmente uma cúspide), e valores negativos para um lado e positivos para o outro. Com isso, temos somente uma curva involuta correspondendo a cada ponto s_0 da curva C .

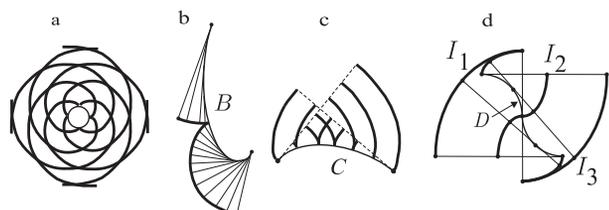


Figura 8: Involutas. **a**: Involutas de um círculo; são espirais de Arquimedes.

b: Uma involuta do arco B , incidindo ortogonalmente na família das retas tangentes ao arco.

c: Esboço de involutas do arco C .

d: Três involutas do arco D .

Como as normais a uma involuta de C são tangentes a C , percebe-se que se E for a evoluta de I então I será uma involuta de E . Dito de outra forma, toda linha plana é a evoluta de todas as suas involutas. Ou ainda, cada linha tem uma infinidade de involutas, e toda linha é involuta de uma única outra linha (a sua evoluta, vista na seção 2.10).

Considere as involutas de uma curva C , e considere a interseção de cada uma dessas involutas com uma dada tangente à curva C : perceba então que todas as retas tangentes às involutas naqueles pontos de interseção são paralelas. Este fato é chamado *propriedade do paralelismo* das involutas (figura 9 **a**).

E percebemos que a distância entre duas involutas de uma curva C , medidas ao longo das tangentes a C , é constante (figura 9 **b**). Este fato é conhecido por *propriedade da equidistância* das involutas.

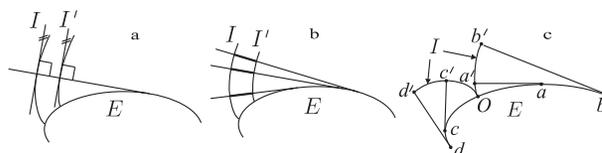


Figura 9: **a**: Propriedade do paralelismo das involutas I e I' .

b: Propriedade da equidistância das involutas I e I' .

c: Propriedade do barbante na involuta I : o comprimento dos arcos aO e bO na curva E é igual ao dos segmentos tangentes aa' e bb' , respectivamente; igualmente cO e dO têm comprimentos iguais a cc' e dd' , respectivamente.

Um modo prático de se desenhar uma involuta usa a *propriedade do barbante* (figura 9 **c**): se um barbante inextensível é todo ele estendido ao longo de uma curva E , e uma das extremidades é mantida fixada em E enquanto a outra é descolada no plano de E mantendo-se o barbante esticado e tangente a E , o caminho percorrido por esta extremidade é um pedaço de uma involuta I de E .

Usando a propriedade do barbante, fica fácil obter a equação das involutas de uma curva qualquer $[x(s), y(s)]$. No ponto variável s da curva o vetor unitário tangente tem componentes $[x_s(s), y_s(s)]$.

$$X = x(s) - (s - s_0)x_s(s), \quad Y = y(s) - (s - s_0)y_s(s). \quad (44)$$

A figura 10 mostra as grandezas que constroem um ponto $[X, Y]$ da involuta cuja origem seja s_0 .

2.11.1. Linhas planas equidistantes de uma elipse

Dada uma curva plana C , e construída a sua evoluta E , vemos que a curva C é uma das involutas de E . As demais

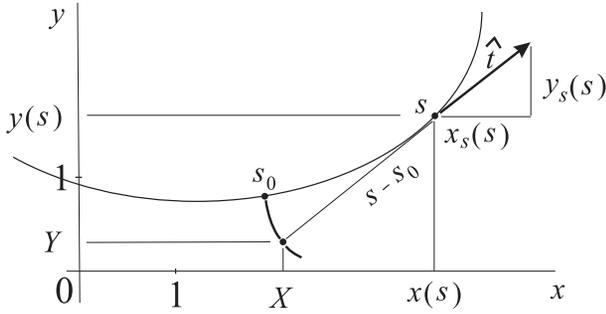


Figura 10: Grandezas envolvidas na equação (44).

involutas de E podem ser construídas de modo muito simples a partir da curva C , usando-se a propriedade das separações constantes (figura 9 b). Essas novas involutas de E serão curvas planas equidistantes da curva C .

Por exemplo, seja C a elipse

$$x(\varphi) = a \cos \varphi, \quad y(\varphi) = b \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 < b < a, \quad (45)$$

cuja evoluta E foi mostrada na figura 6 a; desenhamos as retas normais à elipse, e sobre elas marcamos os pontos $[X, Y]$ com separação m (negativa ou positiva) para a elipse. Após alguns cálculos obtemos

$$\begin{aligned} X(\varphi) &= \left(a - \frac{bm}{r}\right) \cos \varphi, & Y(\varphi) &= \left(b - \frac{am}{r}\right) \sin \varphi, \\ r &:= \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (46)$$

Valores negativos de m geram involutas ovais da evoluta, maiores que a elipse; veja a figura 11 a. Valores $0 < m < b^2/a$ geram também ovais, porém menores que a elipse. Os valores intermediários $b^2/a < m < a^2/b$ produzem as interessantes involutas mostradas na figura 11 b. Finalmente, valores $m > a^2/b$ geram novas ovais, com o raio maior orientado verticalmente (figura 11 c).

3. CURVAS REVERSAS

No espaço tridimensional usual consideremos um triedro ortonormal *fixo*, $[0; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$, com orientação 'mão direita' ($\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$); cada ponto do espaço é especificado por suas coordenadas $[x, y, z]$, ou equivalentemente por seu vetor posição $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$.

Um alerta: há textos que usam orientação 'mão esquerda' para o triedro fixo; em consequência, muitas fórmulas daqueles textos têm sinal oposto aos nossos [2].

Uma curva *reversa* pode ser dada por uma função vetorial $\vec{r}(s)$, isto é, pelas três funções componentes

$$x(s), \quad y(s), \quad z(s), \quad (47)$$

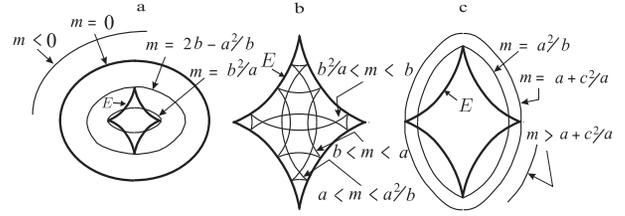


Figura 11: Supõe-se $a/\sqrt{2} < b < a$. **a**: Uma elipse de semieixos a e b ($m = 0$), sua evoluta E , e algumas ovais equidistantes da elipse, com distância $m \leq b^2/a$, todas 'deitadas' como a elipse.

b: Três linhas equidistantes da elipse, involutas de E , com valores $b^2/a < m < a^2/b$.

c: Ovais equidistantes da elipse com $m \geq a^2/b$, com orientação vertical.

sendo s um parâmetro de distância sobre a curva. As equações $\hat{r}_s \cdot \hat{r}_s = 1$ e $\hat{r}_s \cdot \vec{r}_{ss} = 0$, escritas nas eqs. (2) para curvas planas, são válidas também para as curvas reversas, agora escritas

$$x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 = 1, \quad \Rightarrow \quad x_s x_{ss} + y_s y_{ss} + z_s z_{ss} = 0; \quad (48)$$

as óbvias generalizações tridimensionais das eqs. (4), bem como as eqs. (5), valem também para as curvas reversas.

3.1. Triedro movente

Como mostra a figura 12, em cada ponto $p = [x, y, z]$ da curva nós definiremos um *triedro movente*, constituído por 3 vetores unitários ortogonais, o tangente \hat{t} , o normal principal \hat{n} , e o binormal \hat{b} , e por 3 planos ortogonais orientado, o normal $\perp \hat{t}$, o retificante $\perp \hat{n}$, e o osculador $\perp \hat{b}$. Aqui o termo 'movente' se refere à mudança do triedro de um ponto para outro vizinho ao longo da curva. Esta seção tratará dos vetores unitários, e a seção 3.3 cuidará dos três planos ortogonais.

Vetor unitário *tangente* no ponto $p = [x, y, z]$ é

$$\hat{t} := \hat{r}_s \equiv [x_s, y_s, z_s] =: [\alpha, \beta, \gamma] \equiv \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \gamma \hat{z}, \quad (49)$$

onde o subscripto s indica d/ds . Perceba que $\hat{t}(s)$ é orientado no sentido do crescimento de s ; as funções $[\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)]$ são chamadas cossenos diretores de $\hat{t}(s)$ na base fixa $[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$. Sendo \hat{t} unitário, tem-se $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Reta tangente no ponto s é aquela que dá suporte ao vetor $\hat{t}(s)$. Designemos por $[X, Y, Z]$ as coordenadas de um ponto genérico da reta tangente, na base $[0; x, y, z]$; como o vetor $[X - x(s), Y - y(s), Z - z(s)]$ é paralelo ou antiparalelo a $\hat{t}(s) = [\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)]$, temos as seguintes equações para

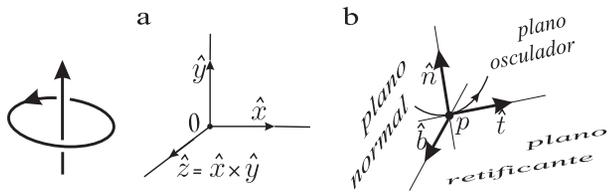


Figura 12: **a**: Com orientação 'mão direita', os vetores unitários fixos \hat{x} , \hat{y} , $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$.

b: O triedro movente com vetores unitários \hat{t} , $\hat{n} \perp \hat{t}$, $\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$ no ponto p da curva orientada, e os três planos ortogonais orientados.

a reta tangente em $[0; x, y, z]$: [3, pág. 7]

$$\frac{X-x}{\alpha} = \frac{Y-y}{\beta} = \frac{Z-z}{\gamma}. \quad (50)$$

Vetor unitário *normal principal*:

$$\hat{n} := \frac{\vec{r}_{ss}}{|\vec{r}_{ss}|} \equiv \rho \vec{r}_{ss} \equiv \rho [x_{ss}, y_{ss}, z_{ss}] =: [l, m, n],$$

$$\rho := \frac{1}{|\vec{r}_{ss}|} = \frac{1}{\sqrt{x_{ss}^2 + y_{ss}^2 + z_{ss}^2}}, \quad (51)$$

sendo $\rho \geq 0$ o raio da curvatura; \hat{n} é perpendicular a \hat{t} , e sempre aponta para o lado côncavo da curva ('aponta para dentro', semelhantemente ao vetor *normal* nas curvas planas); as funções $[l(s), m(s), n(s)]$ são chamadas cossenos diretores de $\hat{n}(s)$ na base fixa $[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$. Devido à unitariedade de \hat{n} , tem-se $l^2 + m^2 + n^2 = 1$; e a ortogonalidade $\hat{t} \cdot \hat{n} = 0$ implica $\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$.

A *reta normal principal* no ponto $[x, y, z]$, com pontos com coordenadas $[X, Y, Z]$ na base fixa, tem equações

$$\frac{X-x}{l} = \frac{Y-y}{m} = \frac{Z-z}{n}, \quad (52)$$

pois os vetores $[X-x, Y-y, Z-z]$ são paralelos ou antiparalelos a $\hat{n} = [l, m, n]$.

Vetor unitário *binormal*:

$$\hat{b} := \hat{t} \times \hat{n} \equiv \rho \vec{r}_s \times \vec{r}_{ss}$$

$$\equiv \rho [y_s z_{ss} - z_s y_{ss}, z_s x_{ss} - x_s z_{ss}, x_s y_{ss} - y_s x_{ss}] =: [\lambda, \mu, \nu], \quad (53)$$

$[\lambda, \mu, \nu]$ são chamados cossenos diretores da binormal na base $[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$. A unitariedade de \hat{b} faz ser $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, e a ortogonalidade de \hat{b} a \hat{t} e a \hat{n} implicam $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$ e $\lambda l + \mu m + \nu n = 0$.

A *reta binormal* no ponto $[x, y, z]$, com pontos com coordenadas $[X, Y, Z]$ na base fixa, tem equações

$$\frac{X-x}{\lambda} = \frac{Y-y}{\mu} = \frac{Z-z}{\nu}. \quad (54)$$

As retas tangente, normal principal e binormal são convencionalmente orientadas como \hat{t} , \hat{n} e \hat{b} , respectivamente. Por sua vez, estes vetores têm orientação relativa dada pela regra da mão direita, a exemplo do triedro fixo $[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$.

Um alerta: há quem defina \hat{b} como $\hat{n} \times \hat{t}$, ocasionando muitas fórmulas discrepantes das nossas.

O conjunto de todas as retas tangentes a uma curva reversa C forma uma superfície, chamada *superfície tangente* de C . Cada ponto da superfície pode ser especificado por um par de números, $[s, u]$, do seguinte modo: a reta tangente à curva no ponto s é numerada como s , e orientada como a curva. Ao longo de cada reta tangente estabelece-se marcações u ordenadas, sendo $u = 0$ o ponto da tangência.

De modo semelhante podemos construir a *superfície normal principal* e a *superfície binormal* da curva C .

3.2. Matriz dos cossenos diretores

As componentes dos vetores $\hat{t}(s)$, $\hat{n}(s)$, e $\hat{b}(s)$ na base fixa $[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$ constituem as linhas da matriz quadrada $M(s)$ dos cossenos diretores [3, pág. 13],

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix}, \quad (55)$$

e a ortonormalidade deles ($\hat{t} \cdot \hat{t} = 1$, $\hat{t} \cdot \hat{n} = 0$, ...) implica M ser ortogonal, isto é, sua *transposta* iguala sua *inversa*, $M^T = M^{-1}$; e como $\hat{b} = +\hat{t} \times \hat{n}$, tem-se $\det M = +1$ e

$$\begin{pmatrix} \alpha & l & \lambda \\ \beta & m & \mu \\ \gamma & n & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\nu - n\mu & \gamma\mu - \beta\nu & n\beta - m\gamma \\ n\lambda - l\nu & \alpha\nu - \gamma\lambda & l\gamma - n\alpha \\ l\mu - m\lambda & \beta\lambda - \alpha\mu & m\alpha - l\beta \end{pmatrix}; \quad (56)$$

relembre-se que todos os nove cossenos diretores (α, \dots, ν) variam ao longo da curva, ou seja, são funções de s .

A passagem da base fixa $[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$ para uma base movente $[\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}]$, e vice-versa, usa as matrizes M e M^T :

$$\begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{n} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & l & \lambda \\ \beta & m & \mu \\ \gamma & n & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{n} \\ \hat{b} \end{pmatrix}. \quad (57)$$

As eqs. (57) nos possibilitam relacionar as coordenadas $[X, Y, Z]$ de um ponto q na base fixa $[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$ com as coordenadas $[\chi, \eta, \zeta]$ desse mesmo ponto q no triedro movente $[\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}]$ que tenha origem p em $[x, y, z]$; com efeito, a figura 13 mostra que

$$(X-x)\hat{x} + (Y-y)\hat{y} + (Z-z)\hat{z} = \chi\hat{t} + \eta\hat{n} + \zeta\hat{b}; \quad (58)$$

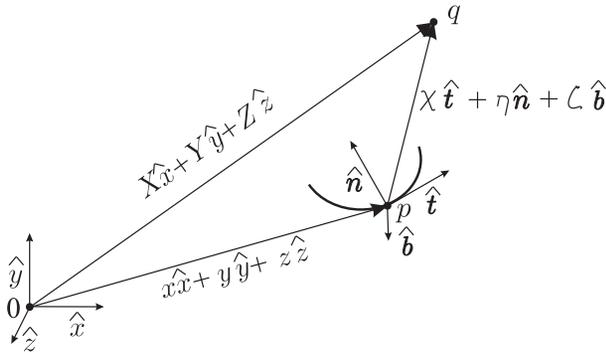


Figura 13: A igualdade $[X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}] = [x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}] + [\chi\hat{t} + \eta\hat{n} + \zeta\hat{b}]$.

usando as (57) na (58) se obtém as relações entre as coordenadas $[X, Y, Z]$ e $[\chi, \eta, \zeta]$:

$$\begin{pmatrix} \chi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X-x \\ Y-y \\ Z-z \end{pmatrix}, \quad (59)$$

$$\begin{pmatrix} X-x \\ Y-y \\ Z-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & l & \lambda \\ \beta & m & \mu \\ \gamma & n & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

3.3. Planos do triedro movente

Na apresentação do triedro movente (seção 3.1) ficou faltando uma descrição mais minuciosa dos planos daquele triedro, o que faremos agora. Em cada ponto s de uma curva reversa, definimos três planos ortogonais orientados, associados aos vetores $[\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}]$: o plano normal, o retificante, e o osculador. Veja a figura 12.

O *plano normal* à curva no ponto $p = [x, y, z]$ é perpendicular ao vetor tangente \hat{t} no ponto; portanto ele contém os vetores \hat{n} e \hat{b} . Chamando $P = [X, Y, Z]$ os seus pontos, percebemos que os vetores $\vec{pP} := [X-x, Y-y, Z-z]$ são perpendiculares ao vetor tangente $\hat{t} = [\alpha, \beta, \gamma]$; então a equação do plano normal é $\hat{t} \cdot \vec{pP} = 0$, ou seja [3, pág. 8],

$$\alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z) = 0. \quad (60)$$

O *plano retificante* à curva no ponto $[x, y, z]$ é perpendicular ao vetor normal principal $\hat{n} = [l, m, n]$ no ponto, portanto seus pontos $[X, Y, Z]$ têm equação linear

$$l(X-x) + m(Y-y) + n(Z-z) = 0. \quad (61)$$

O *plano osculador* à curva no ponto $[x, y, z]$ é o plano que ‘mais contém a curva’ no ponto; um trecho plano de uma curva reversa jaz inteiro no seu plano osculador. Este plano

contém os vetores \hat{t} e \hat{n} , portanto é perpendicular ao vetor binormal $\hat{b} = [\lambda, \mu, \nu]$; esta ortogonalidade faz seus pontos $[X, Y, Z]$ terem equação linear

$$\lambda(X-x) + \mu(Y-y) + \nu(Z-z) = 0. \quad (62)$$

Os planos normal, retificante e osculador são orientados do modo mão direita relativamente aos vetores $\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$, respectivamente. Costuma-se dizer eles contêm 1, 2 e 3 pontos da curva reversa, respectivamente.

3.4. Curvatura e torção

A função *curvatura* $\kappa(s)$ de uma curva indica o quanto a direção da curva está mudando em cada ponto. Como ocorre nas curvas planas, também nas curvas reversas $\kappa(s)$ tem valores somente não-negativos, $\kappa := 1/\rho \geq 0$, sendo $\rho(s)$ o raio variável da curvatura dado na (51) [3, p.9]:

$$\kappa := 1/\rho \equiv |\vec{t}_s| \equiv |\vec{r}_{ss}'|. \quad (63)$$

A função *torção* $\tau(s)$ de uma curva reversa tem qualquer valor real, e é definida somente em pontos onde a curvatura κ for não-nula. A torção informa o quanto a curva está escapando do seu plano osculador ao crescer s , e para qual lado. Ela é definida como a taxa de variação da binormal, do modo

$$d\hat{b}/ds =: -\tau\hat{n}. \quad (64)$$

Como veremos na seção 3.11, o sinal negativo nessa definição fará *positiva* a torção de um *sacarroalha usual*. Um exame atento da eq. (64) nos faz perceber que, ao crescer s , a curva com τ positivo passa do lado negativo do plano osculador para o lado positivo. Um alerta: há quem defina torção com o sinal oposto ao nosso [3, p.16].

Na seção 3.6 veremos que as funções curvatura $\kappa(s)$ e torção $\tau(s)$ são suficientes para revelar a *forma* de uma curva reversa.

3.5. Fórmulas de Frenet

Os vetores ortonormais $[\hat{t}(s), \hat{n}(s), \hat{b}(s)]$ do triedro movente mudam de orientação ao longo da curva. A mudança de cada vetor é dada pelas fórmulas de Frenet,

$$\begin{pmatrix} \vec{t}_s \\ \vec{n}_s \\ \vec{b}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{n} \\ \hat{b} \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \vec{t}_s = \kappa\hat{n}, \\ \vec{n}_s = -\kappa\hat{t} + \tau\hat{b}, \\ \vec{b}_s = -\tau\hat{n}. \end{cases} \quad (65)$$

A fórmula $\vec{t}_s = \kappa\hat{n}$ é na verdade a definição de curvatura κ , como nas eqs. (20) e (63); ela informa que a mudança de direção do vetor \hat{t} se faz na direção e sentido de \hat{n} , portanto a mudança ocorre no plano $\{\hat{t}, \hat{n}\}$, o plano osculador.

E a fórmula $\vec{b}_s = -\tau \hat{n}$ é a definição eq. (64) de torção τ ; ela informa que a mudança de direção do vetor \hat{b} ocorre no plano $\{\hat{n}, \hat{b}\}$, o plano normal. Informa ainda que, quando a torção τ for positiva, a variação \vec{b}_s ocorre no sentido oposto a \hat{n} , ou seja, no sentido oposto ao do centro da curvatura da curva no ponto s .

Finalmente, a fórmula $\vec{n}_s = -\kappa \hat{t} + \tau \hat{b}$ informa o quanto o vetor unitário \hat{n} varia nas direções \hat{t} e \hat{b} .

A variação da orientação do rígido triedro movente ao longo de s é gerenciada, em cada ponto, por um vetor $\vec{\omega}(s)$ tal que

$$\vec{t}_s = \vec{\omega} \times \hat{t}, \quad \vec{n}_s = \vec{\omega} \times \hat{n}, \quad \vec{b}_s = \vec{\omega} \times \hat{b}. \quad (66)$$

Esse vetor é chamado *velocidade angular* do triedro movente, ou *vetor de Darboux*; ele é obtido por inspeção das fórmulas de Frenet (65), e é

$$\vec{\omega} = \tau \hat{t} + \kappa \hat{b}. \quad (67)$$

Ele jaz portanto no plano $\{\hat{t}, \hat{b}\}$, o plano retificante, e tem dimensão de inverso de comprimento. E ele próprio não se mantém fixo no triedro movente; sua mudança ao correr de s é

$$\vec{\omega}_s = \tau_s \hat{t} + \kappa_s \hat{b}; \quad (68)$$

notamos que as contribuições de \vec{t}_s e \vec{b}_s para $\vec{\omega}_s$ se cancelaram de vez que $\vec{t}_s = \kappa \hat{n}$ e $\vec{b}_s = -\tau \hat{n}$. O vetor de Darboux geralmente muda de intensidade, $|\vec{\omega}(s)| = \sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}$; ele muda também de orientação com respeito ao triedro movente, embora se mantenha no plano retificante – aquele ortogonal à normal principal \hat{n} .

Podemos encontrar a velocidade angular $\vec{\Phi}_s$ da mudança de direção do vetor de Darboux. Para tal, veja na figura 14 o ângulo Φ e os vetores $\vec{\omega}(s)$ e $\vec{\omega}(s+ds)$, de onde extraímos o produto vetorial

$$\vec{\omega}(s) \times \vec{\omega}(s+ds) = |\vec{\omega}(s)| |\vec{\omega}(s+ds)| (\sin d\Phi) \hat{n}; \quad (69)$$

o lado esquerdo da (69) nos dá

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(s) \times [\vec{\omega}(s) + \vec{\omega}_s(s) ds] &= \vec{\omega}(s) \times \vec{\omega}_s(s) ds \\ &= (\tau \hat{t} + \kappa \hat{b}) \times (\tau_s \hat{t} + \kappa_s \hat{b}) ds = (\kappa \tau_s - \tau \kappa_s) ds \hat{n}. \end{aligned} \quad (70)$$

Tomando na eq. (69) as aproximações

$$|\vec{\omega}(s)| |\vec{\omega}(s+ds)| \approx \tau^2 + \kappa^2 \quad \text{e} \quad \sin(d\Phi) \approx d\Phi, \quad (71)$$

e usando-as na eq. (70), finalmente encontramos

$$\frac{d\Phi}{ds} =: \vec{\Phi}_s = \frac{\kappa \tau_s - \tau \kappa_s}{\tau^2 + \kappa^2} \hat{n}, \quad (72)$$

a velocidade angular do vetor $\vec{\omega}$ de Darboux.

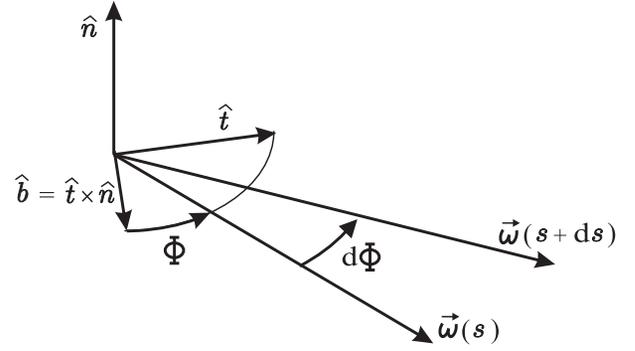


Figura 14: Os vetores $\vec{\omega}(s)$ e $\vec{\omega}(s+ds)$ estão no plano retificante (ortogonal ao vetor normal principal \hat{n}).

3.6. Formato da curva reversa

Semelhantemente à seção 2.7, podemos conhecer o formato de uma curva reversa na vizinhança de qualquer de seus pontos (ponto s_0 , digamos), com a precisão que desejarmos. O formato será expresso em termos unicamente da função curvatura $\kappa(s)$, da função torção $\tau(s)$, e das derivadas de ambas no ponto s_0 .

Começamos relembando a expansão (27)

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(s_0) + (s-s_0)\hat{r}_s(s_0) + \frac{(s-s_0)^2}{2!} \vec{r}_{ss}(s_0) + \dots; \quad (73)$$

precisamos exprimir as constantes vetoriais $\hat{r}_s(s_0)$, $\vec{r}_{ss}(s_0)$, \dots em termos de κ e τ e suas derivadas no ponto s_0 , e dos vetores unitários \hat{t}_0 , \hat{n}_0 , e \hat{b}_0 em s_0 .

Para tal, primeiramente lembramos que, em qualquer ponto s , temos $\hat{r}_s = \hat{t}$; então, usando repetidamente as fórmulas de Frenet $\vec{t}_s = \kappa \hat{n}$, $\vec{n}_s = -\kappa \hat{t} + \tau \hat{b}$, e $\vec{b}_s = -\tau \hat{n}$ nós obtemos, em qualquer ponto s ,

$$\begin{aligned} \hat{r}_s &= \hat{t}, & \vec{r}_{ss} &= \kappa \hat{n}, & \vec{r}_{sss} &= \kappa_s \hat{n} - \kappa^2 \hat{t} + \kappa \tau \hat{b}, \\ \vec{r}_{ssss} &= -3\kappa \kappa_s \hat{t} + (\kappa_{ss} - \kappa^3 - \kappa \tau^2) \hat{n} + (2\kappa_s \tau + \kappa \tau_s) \hat{b}, \dots \end{aligned} \quad (74)$$

Usando \hat{r}_s , \vec{r}_{ss} , e \vec{r}_{sss} das (74), a (73) fica

$$\begin{aligned} \vec{r}(s) &= \vec{r}(s_0) + (s-s_0)\hat{t}_0 + \frac{(s-s_0)^2}{2!} \kappa \hat{n}_0 \\ &+ \frac{(s-s_0)^3}{3!} (-\kappa^2 \hat{t}_0 + \kappa_s \hat{n}_0 + \kappa \tau \hat{b}_0) + \dots, \end{aligned} \quad (75)$$

onde os vetores \hat{t}_0 , \hat{n}_0 , \hat{b}_0 e as funções κ e τ e suas derivadas agora são aqueles no ponto s_0 .

Como $\vec{r}(s) - \vec{r}(s_0)$ indica a posição do ponto s com relação ao ponto s_0 (veja a figura 13), podemos decompor a (75) nas

suas componentes na base $[\hat{t}_0, \hat{n}_0, \hat{b}_0]$:

$$\vec{r}(s) = \chi \hat{t}_0 + \eta \hat{n}_0 + \zeta \hat{b}_0, \quad (76)$$

$$\chi = \delta - \frac{\kappa^2}{3!} \delta^3 - \frac{3\kappa\kappa_s}{4!} \delta^4 + \dots, \quad \delta := s - s_0, \quad (77)$$

$$\eta = \frac{\kappa}{2!} \delta^2 + \frac{\kappa_s}{3!} \delta^3 + \frac{\kappa_{ss} - \kappa^3 - \kappa\tau^2}{4!} \delta^4 + \dots, \quad (78)$$

$$\zeta = \frac{\kappa\tau}{3!} \delta^3 + \frac{2\kappa_s\tau + \kappa\tau_s}{4!} \delta^4 + \dots. \quad (79)$$

Algumas observações: notamos que, na vizinhança imediata de $s = s_0$ a função χ varia como $s - s_0$, enquanto que η cresce proporcionalmente a $(s - s_0)^2$, e ζ varia proporcionalmente a $(s - s_0)^3$. E, como se esperava, as curvas planas ($\tau(s) = 0$) se mantêm no plano osculador (aquele com $\zeta = 0$).

3.7. Ainda curvatura e torção

O problema inverso do anterior é: dada uma curva reversa $\vec{r} = \vec{r}(s)$, obter-se as correspondentes funções curvatura $\kappa(s)$ e torção $\tau(s)$.

A curvatura $\kappa = 1/\rho$ foi obtida na (22) para curvas planas; sua expansão para curvas reversas é trivial:

$$\kappa(s) := |\vec{r}_{ss}| \equiv \sqrt{x_{ss}^2 + y_{ss}^2 + z_{ss}^2}. \quad (80)$$

Expressa em termos de um parâmetro q qualquer, foi também obtida em (14) para curvas planas, e tem trivial generalização para curvas reversas [4, pág. 17]:

$$\kappa(q) = \frac{\sqrt{|\vec{r}_{qq}|^2 - s_{qq}^2}}{s_q^2}. \quad (81)$$

A obtenção de $\tau(s)$ é menos simples; manipula-se (65 c),

$$\begin{aligned} \vec{b}_s &= -\tau \hat{n} \Rightarrow \tau = -\hat{n} \cdot \vec{b}_s = -\hat{n} \cdot (\hat{t} \times \hat{n})_s \\ &= -\hat{n} \cdot \vec{t}_s \times \hat{n} - \hat{n} \cdot \hat{t} \times \vec{n}_s \Rightarrow \tau = 0 - \hat{n} \cdot \hat{t} \times \vec{n}_s \\ &= -(\rho \vec{r}_{ss}) \cdot \vec{r}_s \times (\rho \vec{r}_{ss})_s = -\rho \vec{r}_{ss} \cdot \vec{r}_s \times (\rho_s \vec{r}_{ss} + \rho \vec{r}_{sss}); \end{aligned} \quad (82)$$

como $\vec{r}_{ss} \cdot \vec{r}_s \times \vec{r}_{ss} = 0$ e $\rho = 1/|\vec{r}_{ss}|$, resulta [4, pág. 16]

$$\tau(s) = \frac{\hat{r}_s \cdot \vec{r}_{ss} \times \vec{r}_{sss}}{|\vec{r}_{ss}|^2} = \frac{1}{|\vec{r}_{ss}|^2} \begin{vmatrix} x_s & y_s & z_s \\ x_{ss} & y_{ss} & z_{ss} \\ x_{sss} & y_{sss} & z_{sss} \end{vmatrix}. \quad (83)$$

Fica claro que uma curva é plana se, e somente se, o determinante (83) for nulo.

Se for usado um parâmetro $q \neq s$, um longo porém trivial cálculo algébrico usando (83), (12) e (13) dá [4, pág. 17]

$$\tau(q) = \frac{\vec{r}_q \cdot \vec{r}_{qq} \times \vec{r}_{qqq}}{|s_{qq} \vec{r}_q - s_q \vec{r}_{qq}|^2}. \quad (84)$$

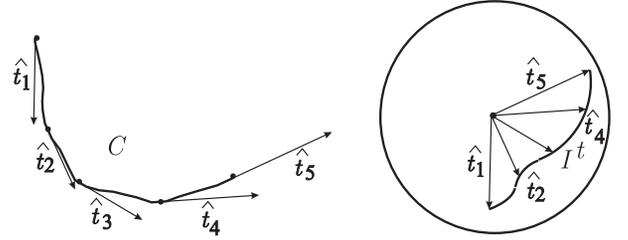


Figura 15: À esquerda, uma curva reversa C e alguns de seus vetores tangentes unitários. À direita, uma esfera unitária qualquer e a indicatriz esférica I' das tangentes de C .

3.8. Indicatrizes esféricas

Indicatriz esférica de uma curva reversa C é um mapa de C em uma esfera de raio unitário. Por exemplo, veja na figura 15 uma curva C e uma esfera qualquer, com raio unitário; para cada ponto s da curva C , construímos um raio orientado na esfera, paralelo à tangente unitária $\hat{t}(s)$. Isso imprimirá na esfera uma curva orientada I' , denominada *indicatriz esférica das tangentes*. Percebe-se que o comprimento $|dI'|$ de cada arco infinitesimal na indicatriz coincide com o módulo $|d\hat{t}|$ da variação infinitesimal da tangente unitária \hat{t} no ponto s correspondente. Como $\kappa = |\vec{t}_s|$, a função curvatura $\kappa(s)$ pode ser obtida como

$$\kappa = |dI'/ds|. \quad (85)$$

Cada curva C gera uma única indicatriz esférica I' , mas há infinidade de diferentes linhas reversas que podem gerar uma mesma indicatriz I' . Por exemplo, dois arcos de círculo de 90° com raios diferentes podem ter mesma indicatriz esférica I' .

De modo análogo, podemos construir a indicatriz esférica *das binormais*, I^b . E de modo análogo, ela nos proporciona o módulo da torção em cada ponto s ,

$$|\tau| = |dI^b/ds|. \quad (86)$$

Podemos ainda construir a indicatriz esférica I^n , das normais principais, de modo análogo. Notamos que, se centrarmos a esfera unitária das indicatrizes na origem das coordenadas, então os pontos de I' , de I^n e de I^b terão localização \hat{t} , \hat{n} , e \hat{b} , respectivamente.

3.9. Círculo e esfera osculadores

É bem conhecido que um círculo é especificado por 3 pontos não-colineares. Então, se além de um ponto p de uma curva reversa escolhermos 2 pontos vizinhos a p , teremos definido um círculo, denominado *círculo osculador* à curva

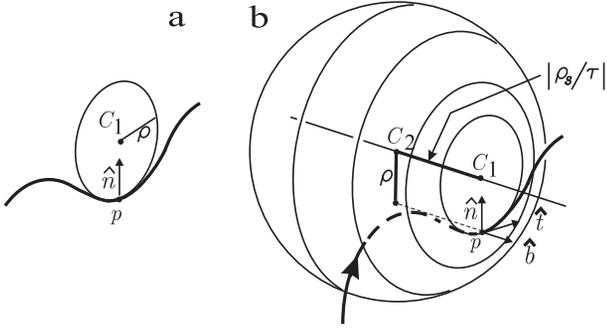


Figura 16: **a**: Uma curva reversa, seu círculo osculador no ponto p com centro C_1 e raio $\rho = 1/\kappa$.

b: A mesma curva, com sua esfera osculadora em p com centro C_2 e raio $\sqrt{\rho^2 + (\rho_s/\tau)^2}$.

em p . Costuma-se dizer que, dentre os círculos que tangenciam a curva em p , o círculo osculador é o que 'mais contém' a curva. Esse círculo está contido no plano osculador à curva em p . No triedro local $[\hat{f}, \hat{n}, \hat{b}]$ o círculo osculador tem centro $C_1 = [0, \rho, 0]$, sendo $\rho = 1/\kappa$ o seu raio e sendo κ a curvatura no ponto. Note-se que o valor τ da torção não importa para o valor do raio do círculo osculador. Veja a figura 16 a.

É também bem conhecido que uma esfera fica definida por 4 pontos não-coplanares. Então escolhemos 3 pontos da curva vizinhos a p e teremos definida a *esfera osculadora* à curva no ponto p . Essa esfera claramente contém o círculo osculador, que é a interseção da esfera osculadora com o plano osculador. Por simetria, se vê na figura 16 b que o centro C_2 da esfera osculadora jaz na *reta polar* do círculo, ou seja, na reta que passa pelo centro C_1 do círculo e é normal ao seu plano [3, p. 15].

O modo como se obtém o raio r_2 e as coordenadas do centro C_2 da esfera osculadora são suficientemente interessantes para merecerem uma minuciosa descrição. Vamos referir todas as coordenadas ao triedro local $[\hat{f}, \hat{n}, \hat{b}]$ do ponto de osculação. Denominando $[\chi, \eta, \zeta]$ as coordenadas de um ponto genérico da esfera, e sendo $[\chi_2, \eta_2, \zeta_2]$ as coordenadas (a descobrir) do centro C_2 da esfera com raio r_2 (também a descobrir), a equação da esfera é

$$(\chi - \chi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 + (\zeta - \zeta_2)^2 = r_2^2. \quad (87)$$

Na vizinhança do ponto de osculação, os pontos da curva são dados pelas expansões (77)–(79) para χ, η, ζ . Devemos impor que, nessa vizinhança, a curva e a esfera tenham 4 pontos em comum; então precisaremos dos termos desde a ordem $(s - s_0)^0$ até a ordem $(s - s_0)^3$, nestas equações. Por simplicidade definimos $\delta := s - s_0$, e as três equações (77)–(79) se resumem a

$$\chi(s) = \delta - \frac{\kappa^2}{6}\delta^3, \quad \eta(s) = \frac{\kappa}{2}\delta^2 + \frac{\kappa_s}{6}\delta^3, \quad \zeta(s) = \frac{\kappa\tau}{6}\delta^3, \quad (88)$$

que levamos à (87):

$$\left(\delta - \frac{\kappa^2}{6}\delta^3 - \chi_2\right)^2 + \left(\frac{\kappa}{2}\delta^2 + \frac{\kappa_s}{6}\delta^3 - \eta_2\right)^2 + \left(\frac{\kappa\tau}{6}\delta^3 - \zeta_2\right)^2 = r_2^2. \quad (89)$$

Grupemos os termos por potências de δ , desde δ^0 até δ^3 :

$$\begin{aligned} & [\chi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - r_2^2] + [-2\chi_2]\delta + [1 - \kappa\eta_2]\delta^2 \\ & + \frac{1}{3}[\kappa^2\chi_2 - \kappa_s\eta_2 - \kappa\tau\zeta_2]\delta^3 = 0. \end{aligned} \quad (90)$$

O ponto de osculação tem $\delta = 0$, então igualando a zero o primeiro bloco $[\dots]$ da (90) nos dará o raio da esfera osculadora, $r_2^2 = \chi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2$, depois que tivermos χ_2, η_2, ζ_2 .

A (90) sem o primeiro bloco tem termos com δ, δ^2 e δ^3 . Para δ suficientemente pequeno precisamos igualar a zero também o segundo bloco $[\dots]$ da (90), o nos dá $\chi_2 = 0$.

Sem os dois primeiros blocos na (90) igualamos a zero também o terceiro bloco $[\dots]$, o que nos dá $\eta_2 = 1/\kappa (\equiv \rho)$.

Finalmente, igualando a zero o quarto bloco $[\dots]$ resulta $\kappa^2\chi_2 - \kappa_s\eta_2 - \kappa\tau\zeta_2 = 0$. Rearrmando estes resultados, ficamos com

$$r_2^2 = \rho^2 + (\rho_s/\tau)^2, \quad [\chi_2, \eta_2, \zeta_2] = [0, \rho, \rho_s/\tau]; \quad (91)$$

estes são o raio da esfera osculadora e as coordenadas do seu centro C_2 na base $[\hat{f}, \hat{n}, \hat{b}]$ do ponto de osculação. Como o centro C_1 do círculo osculador tem coordenadas $[0, \rho, 0]$, vemos que o centro (91b) da esfera osculadora está na reta polar do ponto de osculação, à distância $|\rho_s/\tau|$ do centro do círculo osculador.

Vemos também que os centros C_1 do círculo osculador e C_2 da esfera osculadora coincidem em um ponto onde a torção é não-nula, $\tau \neq 0$, e a curvatura κ é constante ($\rho_s = 0$), caso em que o raio ρ do círculo e o raio r_2 da esfera são iguais; neste caso, o círculo osculador é um círculo máximo da esfera osculadora.

Ainda, vemos que se a torção $|\tau|$ for muito pequena mas a derivada ρ_s não o for, o raio r_2 da esfera osculadora, dado na eq. (91a), será muito grande. A esfera então estará quase tangenciando o plano osculador.

Vamos designar como *curva* G_1 aquela que une os centros dos círculos osculadores de uma curva reversa C . Note que se C for curva plana então G_1 é a evoluta de C ; entretanto, a curva G_1 não é definida como evoluta da curva reversa C . Em verdade a *evoluta* da curva reversa C é definida como a curva G_2 que une os centros C_2 das esferas osculadoras de C .

3.10. Linhas esféricas

Do mesmo modo que chamamos linhas planas aquelas que possam ser desenhadas em um plano, chamamos *li-*

nhas esféricas aquelas desenháveis em uma esfera. As linhas planas se caracterizam por terem torção nula, e queremos descobrir que equação deve ser obedecida por uma linha esférica.

Percebe-se que essa esfera é a única esfera osculadora em todos os pontos da linha, implicando $dr_2/ds = 0$. Como d/ds da (91a) dá

$$r_2 dr_2/ds = \rho \rho_s + (\rho_s/\tau)(\rho_s/\tau)_s, \quad (92)$$

se vê que a condição para uma linha ser esférica é

$$(\rho_s/\tau)_s + \rho\tau = 0. \quad (93)$$

3.11. Sacarrolha usual

Concluimos nosso texto com uma curva reversa muito popular, a hélice circular com torção positiva, como o sacarrolha usual. Suponhamo-la desenhada em um cilindro circular com raio R , e seu passo seja $p = 2\pi r$. Veja a figura 17.

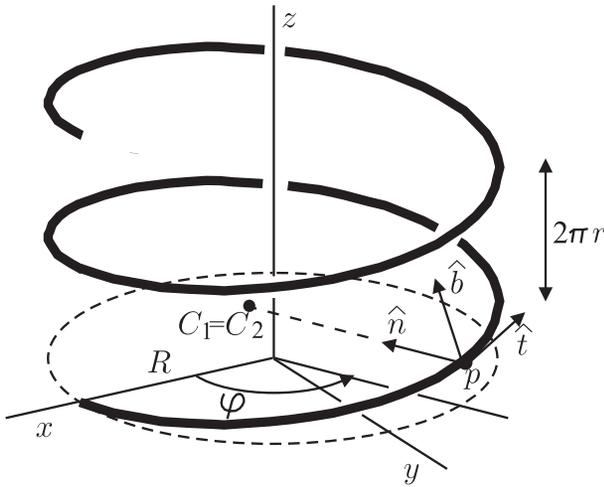


Figura 17: Sacarrolha usual: hélice circular com raio R e passo $2\pi r$, com torção τ positiva. O centro C_1 da curvatura coincide com o centro C_2 da esfera osculadora, ambos distantes v^2/R do ponto p da osculação.

Então suas equações são

$$x(\varphi) = R \cos \varphi, \quad y(\varphi) = R \sin \varphi, \quad z(\varphi) = r\varphi, \quad (94)$$

e o elemento de linha é $ds = v d\varphi$, sendo

$$v := \sqrt{R^2 + r^2}. \quad (95)$$

A curvatura e a torção vêm das eqs. (81) e (84), e são constantes:

$$\kappa = R/v^2 \quad \text{e} \quad \tau = r/v^2. \quad (96)$$

Note que se $R \gg r$ (mola muito comprimida) então $\kappa \approx 1/R$ e $\tau \approx r/R^2$; e se $R \ll r$ (mola muito esticada) então $\kappa \approx R/r^2$ e $\tau \approx 1/r$. E note que $\tau > 0$, implicando o sacarrolha usual ter torção positiva.

O triedro local tem vetores

$$\hat{t} = (R/v) [-\sin \varphi, \cos \varphi, r/R], \quad (97)$$

$$\hat{n} = [-\cos \varphi, -\sin \varphi, 0], \quad (98)$$

$$\hat{b} = (r/v) [\sin \varphi, -\cos \varphi, R/r]. \quad (99)$$

Note-se que \hat{t} é inclinado com ângulo $\alpha = \tan^{-1} r/R$ para cima com relação à horizontal; \hat{n} é horizontal e se dirige para o eixo z ; \hat{b} está no plano que tangencia o cilindro que envolve o sacarrolha, e é inclinado com ângulo α para trás com relação à vertical. Essas inclinações são percebidas com clareza na posição $\varphi = 0$.

O centro C_1 do círculo osculador a um ponto p do sacarrolha está além do eixo, à distância $1/\kappa = R(1 + r^2/R^2)$ de p ; então a evoluta (*locus* dos centros desses círculos) do sacarrolha é também um sacarrolha, com raio r^2/R e passo $2\pi r$. O centro C_2 da esfera osculadora a um ponto p coincide com o centro C_1 do correspondente círculo osculador, pois $\rho_s/\tau = 0$, já que $\tau \neq 0$ e, sendo constante a curvatura κ , tem-se $\rho_s = 0$.

O vetor de Darboux,

$$\vec{\omega} = \tau \hat{t} + \kappa \hat{b} = \frac{1}{v^2} (r\hat{t} + R\hat{b}), \quad (100)$$

tem $\vec{\omega}_s$ nulo devido à eq. (68), portanto acompanha o movimento do triedro movente.

4. CONCLUSÃO

Nesta rápida passagem pelas linhas nos espaços bi- e tridimensional, alguns tópicos menos conhecidos em estudos preliminares não foram comentados, como transformação de Combescure e curvas de Bertrand, e o estudo das ovais, que o leitor interessado poderá encontrar na bibliografia abaixo. Esperamos que você não tenha encontrado dificuldades na compreensão do nosso texto, e que nos perdôe se em ocasiões tenhamos exagerado no nosso anseio de lhe proporcionar leitura fácil.

-
- [1] E. Vidal Abascal, *Introducción a la geometría diferencial*, Editorial Dorsat, S. A., Madrid (1956).
- [2] Ernest Preston Lane, *Metric differential geometry of curves and surfaces*, The University of Chicago Press, Chicago & London (1939).
- [3] Luther Pfahler Eisenhart, *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*, Dover Publications, Inc., New York (1909, 1960).
- [4] Dirk J. Struik, *Lectures on classical differential geometry*, 2nd edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading & London (1950, 1961).