

## Origens do Conceito de Fóton\*

*Origins of the concept of photon*

Francisco Caruso<sup>†</sup>

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CPPF

Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 - Urca

Rio de Janeiro - RJ - Brasil - CEP: 22290-180

Vitor Oguri<sup>‡</sup>

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Rua São Francisco Xavier, 524 - Maracanã,

Rio de Janeiro - CEP: 20550-900

Submetido: 19/07/2016

Aceito: 28/07/2106

**Resumo:** O texto mostra a construção do conceito de fóton no início do século XX, ou seja, da natureza corpuscular da luz, a partir da lei de Planck, em 1900, para o espectro de radiação do corpo negro, e do método de quantização da luz por Einstein, em 1905.

**Palavras chave:** fóton; luz; física moderna; Planck; Einstein.

**Abstract:** The paper discuss the construction of the concept of photon at the beginning of the 20th century. In other words, how the corpuscular nature of light has grown, from Planck's law for the black-body radiation, in 1900, and from Einstein's quantization of light, in 1905.

**Keywords:** photon; light; modern physics; Planck; Einstein.

### 1. A ÓPTICA GEOMÉTRICA

relacionadas por

Para os antigos gregos, assim como o *som* estava associado à audição, a *luz* estaria associada ao mecanismo da visão. Enquanto os atomistas acreditavam que o olho recebia as imagens como feixes de partículas de luz provenientes dos objetos, os pitagóricos sustentavam que o olho enviava raios contínuos de luz que incidiam sobre os objetos.

Preocupando-se apenas com a propagação da luz, Euclides de Alexandria elabora uma teoria dos fenômenos luminosos fundamentada na Geometria.

Quase 2000 anos depois, em 1621, o holandês W. Snell descobre a *lei da refração*, a qual estabelece que as direções de um raio de luz, ao atravessar a superfície de separação de dois meios (1 e 2) homogêneos e isotrópicos (Fig. 1), estão

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1)$$

sendo  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os ângulos dos raios incidente e refratado em relação à normal a superfície, e  $n_1$  e  $n_2$  os índices de refração dos meios 1 e 2, respectivamente.

Em 1657, o matemático francês Pierre Fermat deduz as leis da reflexão e da refração, ao adotar o princípio de que *a natureza atua pelos caminhos e meios mais rápidos*.

Em 1666, Isaac Newton utiliza a refração para decompor a luz solar em raios de várias cores, dando origem à espectroscopia óptica. Em suas palavras:

*Tendo escurecido meu quarto e feito um pequeno orifício na minha cortina, para permitir a entrada de uma quantidade suficiente de luz do Sol, coloquei meu prisma próximo à entrada de luz, de forma que ela pudesse ser refratada sobre a parede oposta.*

\*Palestra apresentada por Vitor Oguri na Sessão A da Lishep 2015, *A Importância da luz na Física: dos fótons aos higgs*, realizada na UEA, Manaus, Amazonas, 27 de julho de 2015.

<sup>†</sup>Electronic address: caruso@cbpf.br

<sup>‡</sup>Electronic address: oguri@uerj.br

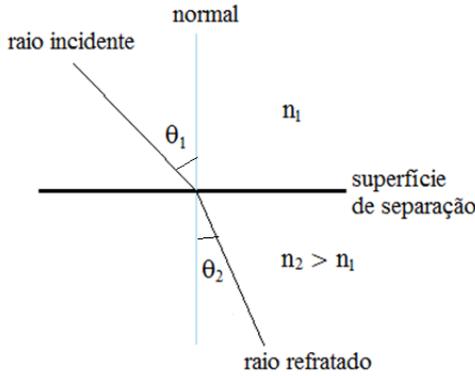


Figura 1: Esquema da refração da luz entre dois meios.

## 2. FENÔMENOS ONDULATÓRIOS

Enquanto o *som* pode ser caracterizado como o efeito produzido por perturbações da pressão ou da densidade do ar, que fazem vibrar os tímpanos com frequências de 20 Hz a 20 kHz, os fenômenos ópticos ora eram considerados como ondulatórios, ora como de origem corpuscular.

Os fenômenos acústicos se caracterizam pela transferência de energia de uma região a outra em um meio líquido, sólido ou gasoso, e resultam da comunicação dos movimentos de vibração, em última instância, entre os átomos do meio.

### 2.1. A equação de onda de d'Alembert

Apesar da natureza discreta da matéria, o efeito resultante pode ser caracterizado por alterações ou perturbações de algumas propriedades macroscópicas do meio, tais como a densidade e a pressão em um gás, ou o deslocamento dos pontos de uma corda elástica com relação a sua posição de equilíbrio.

Essas perturbações do meio, usualmente chamadas *ondas*, são descritas por funções contínuas da posição ( $\vec{r}$ ) e do tempo ( $t$ ), denominadas *funções de onda*,  $\Psi(\vec{r}, t)$ , as quais obedecem a chamada *equação de onda* [1], estabelecida por d'Alembert, em 1747:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\vec{r}, t) \quad (2)$$

sendo  $v$  uma constante característica do meio, denominada *velocidade de propagação* da onda, e

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

### 2.2. Ondas monocromáticas

Um tipo de movimento ondulatório especial é aquele caracterizado por ondas monocromáticas, isto é, ondas de perfil

periódico e harmônico (Fig. 2), do tipo

$$\Psi(x, t) = A \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - vt \right) \quad (3)$$

em que  $A$  é a *amplitude* da onda,  $\lambda$  é o comprimento de onda (período espacial) e  $v = 1/T$ , o inverso do período temporal ( $T$ ), é a frequência do movimento.

Essa função de onda descreve a propagação de uma onda monocromática na direção e sentido positivo do eixo  $x$ , com velocidade  $v = \lambda v$ .

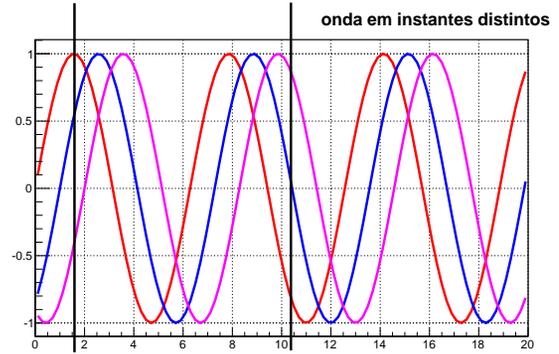


Figura 2: Onda monocromática em vários instantes.

A característica fundamental de uma onda monocromática é a proporcionalidade entre a energia transferida por unidade de tempo e de área, denominada *intensidade* da onda ( $I$ ), e o quadrado da amplitude ( $A$ ), ou seja,

$$I \propto A^2 \quad (4)$$

### 2.3. Ondas estacionárias

Em geral, o movimento ondulatório estabelecido em uma corda não é descrito apenas por ondas que se propagam sem obstáculos em apenas um sentido, a menos que a corda seja infinita e não haja descontinuidades na densidade, ou vínculos impostos, como a fixação de seus extremos.

Diferentemente dessas *ondas de propagação*, em uma corda de densidade  $\rho$  e comprimento  $L$ , com extremos fixos, sujeita a uma força de tensão  $\vec{F}$ , o movimento ondulatório pode resultar da superposição de duas ondas monocromáticas que se propagam em sentidos opostos com velocidades de magnitude  $v$ , que foram refletidas em seus extremos,

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= A \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - vt \right) + B \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} + vt \right) \\ &= (A + B) \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} \right) \cos 2\pi vt + \\ &\quad - (A - B) \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} \right) \sin 2\pi vt \end{aligned}$$

sendo  $\lambda v = v = (F/\rho)^{1/2}$ .

Uma vez que a corda é fixa nos extremos, considerando

que um dos extremos está em  $x = 0$ , a solução que satisfaz esse vínculo é proporcional a

$$\text{sen} \left( \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cos 2\pi \nu t$$

Enquanto a velocidade  $v$  não depende dos vínculos impostos à corda (condições de contorno), o mesmo não ocorre para o comprimento de onda e para a frequência, pois a condição de que a função de onda deve se anular no outro extremo fixo, em  $x = L$ , implica

$$\text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} L = 0 \implies \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ou seja,

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \implies \nu_n = \frac{v}{\lambda_n}$$

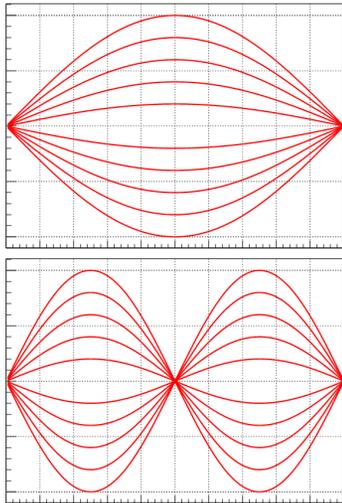


Figura 3: Ondas estacionárias em vários instantes.

Assim, os valores possíveis para o comprimento de onda e para a frequência constituem um conjunto discreto de valores de comprimentos de onda e frequências próprias, ou características,

$$\{\lambda_n, \nu_n\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

que correspondem a um conjunto de *ondas estacionárias*  $\Psi_n(x, t)$  (Fig. 3), denominadas também de *modos normais de vibração*, dadas por

$$\Psi_n(x, t) = \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \cos 2\pi \nu_n t \quad (5)$$

Devido à linearidade da equação de d'Alembert, a solução mais geral para as vibrações da corda vibrante é dada pela

superposição linear de ondas estacionárias,

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \cos 2\pi \nu_n t \quad (6)$$

na qual  $C_n$  indica o peso de cada onda estacionária na superposição que representa a solução geral.

Assim, os modos normais comportam-se como componentes independentes pelos quais a energia total se acha distribuída e, nesse sentido, diz-se que a energia de uma onda é transportada por portadores de energia discretos e independentes.

### 3. A LUZ COMO UM FENÔMENO ONDULATÓRIO

O debate sobre a natureza corpuscular ou ondulatória da luz estendeu-se durante séculos. Um dos principais pontos dessa polêmica envolvia a aceitação e implicações do conceito de vácuo. Como poderiam ocorrer ações à distância no vazio?

Por não acreditar no vazio, o filósofo francês René Descartes, em 1644, compara a propagação da luz com a do som através de um meio. Descartes considera a luz como uma pressão transmitida através de um meio perfeitamente elástico, o *éter*. Esse meio, de tão rarefeito, seria capaz de penetrar todos os corpos sem ser percebido.

Embora Newton não tivesse uma opinião definitiva sobre a natureza da luz, uma de suas hipóteses considerava a luz como um feixe de corpúsculos que se deslocavam mesmo no vácuo. Esses corpúsculos poderiam penetrar em materiais transparentes e eram refletidos pelas superfícies dos materiais opacos.

Foi Christiaan Huygens quem, em 1670, retomou o ponto de vista ondulatório para a luz. Tal concepção ondulatória era compatível com a não aceitação da ideia de vácuo, pois, em analogia com as ondas sonoras, necessitariam de um meio para se propagarem. Desse modo, Huygens se viu obrigado a resgatar o *éter* como o meio no qual ocorreriam os fenômenos luminosos.

No entanto, mesmo com a descoberta do físico italiano Francesco Grimaldi, já em 1665, do fenômeno conhecido como *difração*, no qual se via luz projetada na região que deveria ser exclusivamente de sombra, a aceitação do caráter ondulatório da luz não era compartilhada pela maioria dos físicos.

Somente mais tarde, no início do século XIX, após os experimentos do inglês Thomas Young e do francês Augustin Fresnel sobre a interferência e a difração da luz, e com as medições da velocidade de propagação da luz, feitas pelo francês Léon Foucault, a concepção ondulatória da luz foi aceita pela maioria dos físicos.

#### 3.1. Difração da luz por uma fenda estreita

Originalmente, o termo difração surgiu para designar o fenômeno que se manifesta sempre que a luz encontra um

objeto ou obstáculo cujas dimensões são suficientemente pequenas do ponto de vista macroscópico, mas, ainda assim, grandes comparadas ao comprimento de onda da luz. Tal fenômeno não podia ser explicado pela hipótese de que a luz seria composta de raios que se propagavam em linha reta.

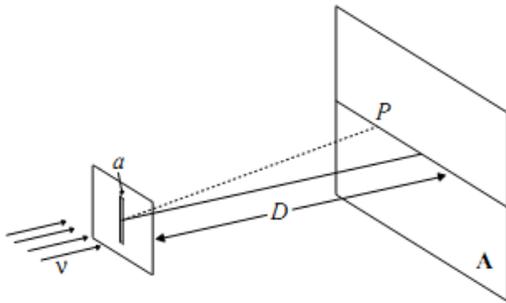


Figura 4: Esquema de difração da luz por uma fenda estreita.

A difração por uma fenda estreita de espessura  $a$ , iluminada por uma fonte de luz de frequência  $\nu$  (Fig. 4), resulta da superposição de um grande número de ondas de mesmo comprimento de onda que foram difratadas pela fenda, em uma dada região do espaço.

Para pontos distantes da fenda, a intensidade da luz observada no anteparo, além de um máximo principal em  $x = 0$ , apresenta mínimos e máximos secundários, que se apresentam como franjas claras e escuras no anteparo (Fig. 5).



Figura 5: Franjas claras e escuras em um anteparo, devido à difração de luz por uma fenda.

Esses mínimos e máximos decorrem da diferença de caminhos percorridos pelas ondas difratadas entre a fenda e o anteparo. Dependendo dessa diferença, pode haver uma superposição construtiva da amplitude da onda difratada resultante e, portanto, da intensidade, ou uma superposição destrutiva, que diminui a intensidade da luz no anteparo.

### 3.2. O experimento da dupla fenda de Young

No experimento da dupla fenda (Fig. 6), como há dois caminhos para a luz se propagar até o anteparo, o padrão de franjas resulta da superposição de ondas que alcançam o anteparo por cada um dos caminhos.

Nesse caso, a intensidade da luz observada no anteparo depende da diferença de caminho ( $\delta$ ). Se a diferença de caminho for um múltiplo inteiro do comprimento de onda  $\lambda$ , ou seja,

$$\delta = n\lambda \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

a interferência das ondas é construtiva, e a intensidade é máxima.

Uma vez que as fendas, apesar de estreitas, possuem largura finita, a intensidade devida à interferência de duas fendas é modulada pelo padrão de intensidade da difração em cada fenda. Assim, a partir da franja central mais intensa, a intensidade das franjas vai decrescendo, de acordo com a relação entre a distância ( $d$ ) entre as fendas e a largura ( $a$ ) das fendas (Fig. 7).

## 4. A DESCRIÇÃO ELETROMAGNÉTICA DA LUZ

Baseando-se principalmente nas ideias de Faraday sobre um éter cheio de linhas de força, que transmitiria as ações eletromagnéticas, Maxwell realizou uma das sínteses mais fundamentais na história da Física, publicada em 1865, ao mostrar que todos os fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos podem ser descritos, unificadamente, a partir de um conjunto de equações diferenciais, conhecidas como *equações de Maxwell*.

A partir dessas equações, Maxwell mostrou que as componentes dos campos elétricos e magnéticos no vácuo obedecem à equação de onda de d'Alembert, e se propagam com velocidade

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (8)$$

sendo  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$  F/m a permissividade elétrica, e  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m a permeabilidade magnética do vácuo.

Assim, os campos se propagam no vácuo com velocidade da ordem de  $c \simeq 3,0 \times 10^8$  m/s, ou seja, igual à velocidade da luz no vácuo.

Em um meio dielétrico ( $\mu \simeq \mu_0, \epsilon > \epsilon_0$ ), os campos obedecem também à equação de onda de d'Alembert, mas com velocidade de propagação ( $v$ ) dada por

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} < c \quad (9)$$

Desse modo, a teoria de Maxwell estabelece que o índice

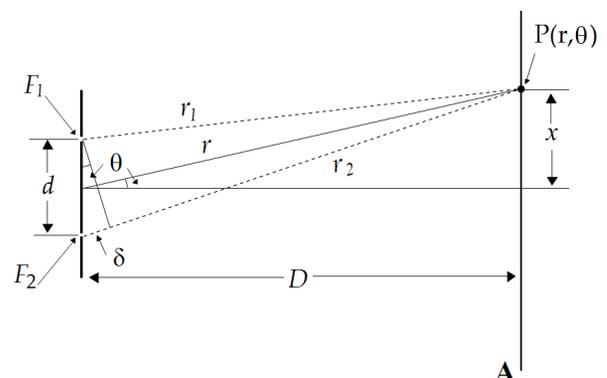


Figura 6: Vista de topo do esquema de interferência e difração por duas fendas.

de refração ( $n$ ) de um meio dielétrico, definido pela razão entre a velocidade da luz no vácuo ( $c$ ) e no meio ( $v$ ) depende das constantes dielétricas e é dado pela *relação de Maxwell*,

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \quad (10)$$

Uma característica fundamental da propagação dos campos eletromagnéticos no vácuo, observada experimentalmente e deduzida das equações de Maxwell, é o caráter transversal das ondas eletromagnéticas. Ou seja, os campos elétrico  $\vec{E}$  e magnético  $\vec{B}$  oscilam perpendicularmente à direção de propagação  $\vec{k}$  da onda, em qualquer instante e posição (Fig. 8).

A Tabela I apresenta um resumo do espectro eletromagnético no vácuo, em que a relação entre o comprimento de onda ( $\lambda$ ) e a frequência ( $\nu$ ) é dada por  $\lambda\nu = c$ .

Tabela I: Frequência e comprimento de onda de algumas radiações que constituem o espectro eletromagnético

Tipo de Radiação	Frequência $\nu$ (Hz)	Comprimento de onda ( $\lambda$ )
Microondas	$10^9 - 10^{12}$	(300 - 0.3) mm
Infravermelho	$10^{12} - 4.3 \times 10^{14}$	(300 - 0.8) $\mu\text{m}$
Luz (visível)	$(4.3 - 5.7) \times 10^{14}$	(0.8 - 0.4) $\mu\text{m}$
Ultravioleta	$5.7 \times 10^{14} - 10^{16}$	(0.4 - 0.03) $\mu\text{m}$
Raios X	$10^{16} - 10^{19}$	(300 - 0.3) Å

Do mesmo modo que as ondas monocromáticas acústicas, a intensidade de uma onda eletromagnética monocromática é proporcional ao quadrado do módulo da amplitude dos campos.

Ao se atribuir energia e *momentum* ao campo eletromagnético, pode-se concluir também que uma onda eletromagnética deve exercer pressão quando absorvida ou refletida por uma superfície. De fato, a pressão exercida pela radiação solar foi medida pelo russo N. Lebedev e pelos americanos E. Nichols e G. Hull, em 1901.

De forma análoga às ondas acústicas estacionárias, considerando a energia de uma onda eletromagnética distribuída entre portadores de energia e *momentum* discretos e independentes, a radiação eletromagnética comporta-se como um gás capaz de exercer pressão sobre as paredes de uma cavidade.

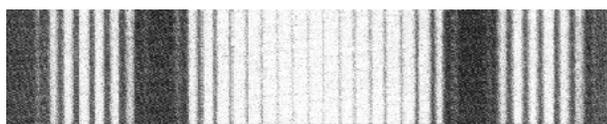


Figura 7: Franjas claras e escuras em um anteparo, devido à interferência da luz por duas fendas.

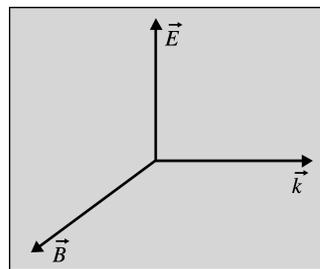


Figura 8: Triedro representando a propagação transversal dos campos elétrico e magnético.

### 5. O ESPECTRO DE RADIAÇÃO DO CORPO NEGRO

A partir da ideia de Newton de separar as componentes da luz solar por um prisma, os alemães Robert Bunsen e Gustav Kirchhoff inventam o espectrógrafo óptico (Fig. 9), em 1860, e utilizam-no para investigação da radiação emitida pelos sólidos ou gases quando aquecidos.

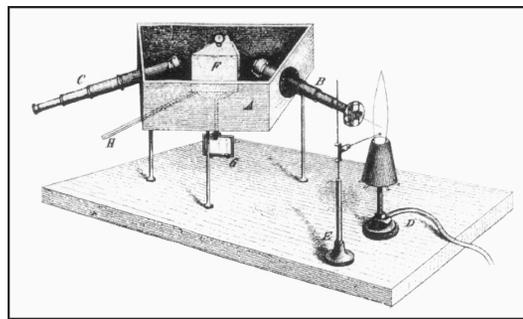


Figura 9: Ilustração do aparato idealizado por Kirchhoff & Bunsen para observação de espectros de diversas substâncias.

Após a radiação passar pelo prisma e projetar os raios luminosos de diferentes comprimentos de onda em diferentes direções, obtém-se o chamado *espectro* de emissão da substância.

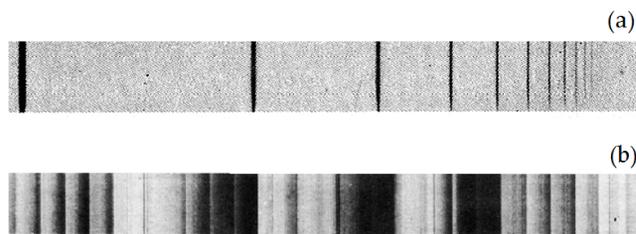


Figura 10: (a) Espectro de emissão do hidrogênio; (b) espectro de banda de um gás não-monoatômico.

Cada elemento químico dá origem a um espectro de emissão característico, como se fosse uma espécie de “impressão digital” do elemento. Esses espectros, projetados em um anteparo como o vidro de uma luneta, se apresentavam para os gases monoatômicos como um conjunto de *linhas* espaçadas e paralelas; para os sólidos e gases não monoatômicos, como *bandas* contínuas (Fig. 10).

Em um sólido, a distribuição de energia entre as várias componentes monocromáticas da radiação é tal que, abaixo

de 500°C, a maior parte da energia está associada à radiação na região do infravermelho ( $\lambda \simeq 100\mu\text{m}$ ) e, para temperaturas mais elevadas, alguma radiação visível é emitida. Quanto mais alta a temperatura, maior é a taxa de emissão de energia eletromagnética.

Essa perda de energia devida à temperatura do corpo pode ser compensada de várias maneiras. O corpo pode ser iluminado pela luz de uma lâmpada incandescente ou colocado em contato com uma chama. Na ausência de qualquer fonte de calor desse tipo, o corpo recebe energia de outros corpos vizinhos e sua energia interna permanecerá constante, quando a taxa de emissão for igual à taxa de absorção de energia.

Os precursores da espectroscopia, Bunsen e Kirchhoff, haviam estabelecido que a razão entre a intensidade ( $I$ ) de radiação emitida e a fração de energia absorvida ( $a$ ) só depende da temperatura ( $T$ ) do corpo, ou seja, a razão  $I/a$  é uma função universal que depende da temperatura,

$$\frac{I}{a} = f(T)$$

Uma vez que para o tungstênio ( $\bar{w}$ ), à temperatura de 2450 K,  $a = 0,24$  e  $I = 50 \text{ W/cm}^2$ , para um corpo recoberto de fuligem, para o qual  $a \simeq 1$ , a intensidade da radiação emitida à mesma temperatura é da ordem de  $208,3 \text{ W/cm}^2$ .

Nas palavras do próprio Kirchhoff,

*para raios de mesmo comprimento de onda e mesma temperatura, a razão do poder emissivo e de absorção é a mesma para todos os corpos.*

Assim, a intensidade espectral da radiação de um corpo negro ( $a = 1$ ) é dada por uma função universal  $I_\lambda(T)$ , que depende do comprimento de onda ( $\lambda$ ) (ou da frequência  $\nu$ ) e de sua temperatura  $T$ .

Conforme mostrado por Kirchhoff, do ponto de vista experimental, qualquer cavidade com paredes totalmente refletoras no interior de um sólido que tenha uma pequena abertura (Fig. 11) se comporta como um corpo negro.

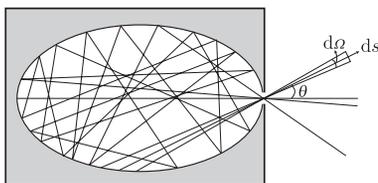


Figura 11: Esquema da radiação de corpo negro por uma cavidade.

De fato, toda radiação vinda do exterior que passe pelo orifício é refletida várias vezes nas paredes internas até ser totalmente absorvida por elas. Por outro lado, quando o sólido se aquece, estas paredes emitem radiação eletromagnética, cuja maior parte permanece no interior da cavidade. Em equilíbrio térmico, através de reflexões sucessivas, a energia da radiação emitida pelas paredes é igual à absorvida. Por essa razão, a radiação no interior da cavidade e, portanto, também a pequena fração da radiação que dela emerge através da abertura devem possuir exatamente a distribuição espectral de intensidade característica da radiação do corpo negro.

Os primeiros resultados da análise espectroscópica da emissão da radiação de corpo negro, obtidos pelo alemão Friedrich Paschen, em 1894, envolviam comprimentos de onda relativamente curtos, da ordem de  $5 \mu\text{m}$ , na faixa do infravermelho (Fig. 12). Dessas observações, Paschen e o também alemão Wilhelm Wien sugeriram, independentemente, em 1896, uma fórmula semi-empírica que se ajustava às curvas experimentais da densidade espectral de energia da radiação emitida, a chamada *lei de Wien*.

$$u_\nu \sim \nu^3 e^{-a\nu/T} \quad (11)$$

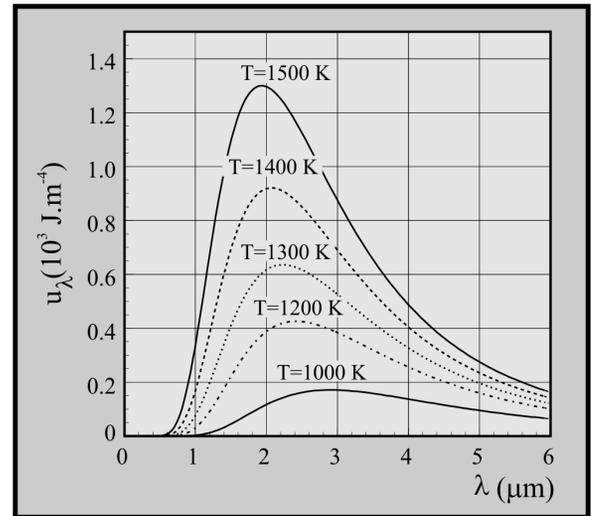


Figura 12: Distribuições espectrais de energia para várias temperaturas.

Em 1900, dois grupos do *Physicalisch-Technische Reichsanstalt*, de Berlim, constituídos de O. Lummer, E. Pringsheim, F. Kurlbaum e H. Rubens estenderam as observações para comprimentos de onda maiores, da ordem de  $50 \mu\text{m}$  (Fig. 13).

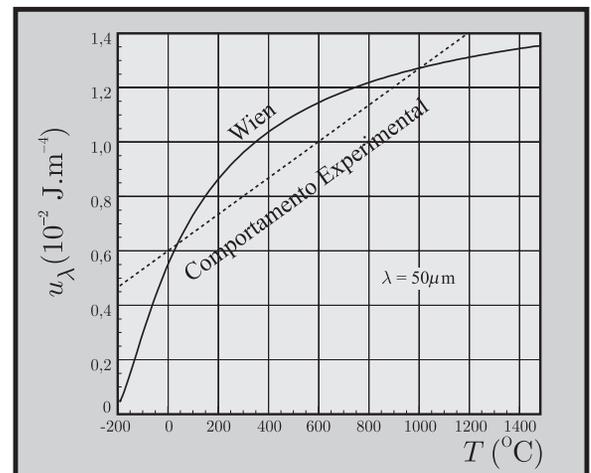


Figura 13: Comparação da lei de Wien (linha cheia), com os dados de Rubens e Kurlbaum (linha pontilhada), para radiação de comprimento de onda da ordem de  $50 \mu\text{m}$ .

Os resultados assim obtidos, principalmente por Kurlbaum e Rubens, estabeleceram definitivamente que, para essas frequências menores, bem afastadas da região visível, em vez de se comportar de acordo com a fórmula de Wien, a densidade espectral de energia é proporcional à temperatura.

$$u_\nu \sim \nu^2 T \quad (12)$$

Essa dependência linear com a temperatura, denominada *lei de Rayleigh*, já havia sido obtida por *Lord Rayleigh* no mesmo ano de 1900.

### 5.1. Os osciladores de Planck

Foram esses resultados que forçaram o alemão Max Planck a reavaliar seus conceitos e estudos iniciais da radiação de corpo negro, em um clássico e frutífero exemplo de interação entre experimento e teoria.

Inicialmente, em meados de 1900, Planck obtém uma fórmula de interpolação, cujos limites eram a lei de Rayleigh (para baixas frequências) e a lei de Wien (para altas frequências), mas sem conteúdo físico.

Desde o início, a abordagem de Planck sobre a radiação de corpo negro baseava-se na Termodinâmica e em um modelo no qual a matéria seria constituída de osciladores elementares. As vibrações dos osciladores das paredes da cavidade estariam em equilíbrio térmico com a radiação eletromagnética estabelecida em seu interior, modo que a perda de energia de cada oscilador seria compensada pela absorção de energia da radiação. Desse modo, Planck obteve a relação entre a densidade espectral de energia  $u_\nu$  da radiação e a energia média  $\langle \epsilon \rangle$  de cada oscilador como

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle \epsilon \rangle \quad (13)$$

Segundo a lei de Wien, a energia média seria dada por

$$\langle \epsilon \rangle \sim \nu e^{-a\nu/T} \quad (14)$$

e, segundo a lei de Rayleigh, por

$$\langle \epsilon \rangle \sim T \quad (15)$$

Com os resultados experimentais dos grupos de Berlim, Planck vê-se obrigado a adotar a definição de entropia e a abordagem estatística do austríaco Ludwig Boltzmann para a fundamentação da lei do espectro de radiação do corpo negro.

### 5.2. A entropia de Boltzmann

Na abordagem de Boltzmann, as relações entre as grandezas macroscópicas que caracterizam um sistema são estabelecidas a partir da definição de entropia.

Segundo Boltzmann, a entropia  $S$  de um sistema de  $N$  partículas, ocupando volume  $V$  e tendo energia  $U$ , em equilíbrio térmico à temperatura  $T$ , é uma medida da desordem do sistema, expressa por

$$S(N, V, U) \propto \ln G(N, V, U) \quad (16)$$

em que  $G(N, V, U)$  é o número total de configurações microscópicas compatíveis com os vínculos externos impostos ao sistema. Na linguagem estatística, diz-se que o conjunto de valores  $(N, V, U)$  define um macroestado do sistema e  $G(N, V, U)$  é o número de microestados compatíveis com esse macroestado. Nesse sentido, quanto maior o número de partículas, o volume ou a energia de um sistema, maior o número total de configurações, maior a desordem e, conseqüentemente, maior a entropia do sistema.

### 5.3. A lei de Planck e o quantum de energia

Ao final do ano de 1900, Planck utilizou a expressão de Boltzmann para calcular a entropia da radiação de corpo negro [2].

Dividindo a energia  $U$  de um conjunto de  $N$  osciladores idênticos em  $M$  elementos de energia  $\epsilon = U/M$ , e considerando-os indistinguíveis, Planck distribuiu esses elementos pelos  $N$  osciladores, obtendo para o número ( $G$ ) total de estados a expressão

$$G = \frac{(N+M-1)!}{M!(N-1)!} \simeq \frac{(N+M)^{N+M}}{M^M N^N}$$

Por exemplo, para um conjunto  $(A, B, C)$  de  $N = 3$  osciladores e  $M = 2$  elementos de energia  $(\alpha, \beta)$  indistinguíveis, obtêm-se  $G = 6$  estados para o sistema (Tabela II).

A	B	C
$\alpha$	$\beta$	—
$\beta$	$\alpha$	—
$\alpha$	—	$\beta$
$\beta$	—	$\alpha$
—	$\alpha$	$\beta$
—	$\beta$	$\alpha$
$\alpha, \beta$	—	—
—	$\alpha, \beta$	—
—	—	$\alpha, \beta$

Tabela II: Distribuição de dois elementos de energia indistinguíveis por três osciladores.

Para quantificar a entropia, Planck introduz uma constante de proporcionalidade na expressão de Boltzmann, e define a entropia como

$$S = k \log G \quad (17)$$

sendo a constante de proporcionalidade  $k$  a chamada *constante de Boltzmann*.

Assim, a entropia do conjunto de osciladores é dada por

$$\begin{aligned} S &= k[(N+M) \log(N+M) - N \log N - M \log M] \\ &= k \left[ N \left(1 + \frac{M}{N}\right) \log \left(1 + \frac{M}{N}\right) - N \frac{M}{N} \log \frac{M}{N} \right] \\ &= Nk \left[ \left(1 + \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\varepsilon}\right) \log \left(1 + \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\varepsilon}\right) - \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\varepsilon} \log \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\varepsilon} \right] \end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{1}{T} = \frac{d\langle s \rangle}{d\langle \varepsilon \rangle} = \frac{k}{\varepsilon} \log \left(1 + \frac{\varepsilon}{\langle \varepsilon \rangle}\right) \quad (18)$$

ou seja,

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \quad (19)$$

A comparação da equação (17) com a lei de Wien,  $\langle \varepsilon \rangle \sim \nu e^{-a\nu/T}$ , válida no limite de altas frequências, mostra que o valor do elemento de energia não pode ser arbitrário: deve ser proporcional à frequência ( $\varepsilon \sim \nu$ ).

A partir desse resultado, Planck conclui que o elemento de energia possui um valor mínimo determinado pela frequência da componente da radiação emitida, ou seja, deve ser igual a um *quantum* de energia,

$$\varepsilon = h\nu \quad (20)$$

na qual a constante de proporcionalidade  $h$  passa a ser denominada *constante de Planck*.

Dessa maneira, Planck introduziu e calculou duas constantes universais da Física: a constante de Boltzmann ( $k$ ) e a constante de Planck ( $h$ ), cujos valores são da ordem de

$$\begin{cases} k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \\ h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J.s} \end{cases}$$

Assim, de acordo com as expressões (13), (19) e (20), a lei obtida por Planck para a densidade espectral de energia,

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

representada na Fig. 14 para várias temperaturas, sintetiza

todas as leis e fórmulas previamente estabelecidas para o espectro de radiação do corpo negro.

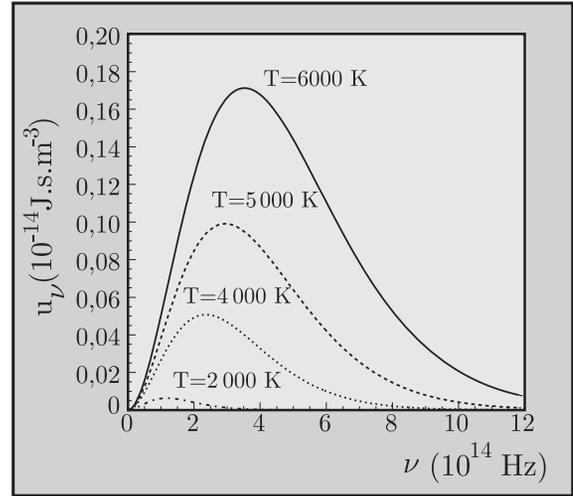


Figura 14: Isotermas das distribuições espectrais de energia.

Como exemplo de aplicação da fórmula de Planck, uma vez que a temperatura da superfície do Sol é da ordem de 5800 K, as curvas da Fig. 14 mostram que grande parte da energia da radiação solar encontra-se na parte visível do espectro ( $\nu_{\text{vis}} \simeq 5 \times 10^{14}$  Hz). Por outro lado, como a temperatura do filamento de tungstênio de uma lâmpada não pode ser maior do que a do seu ponto de fusão (3683 K) compreende-se por que sua eficiência é baixa.

Uma das demonstrações mais impressionantes do espectro de radiação de corpo negro e da lei de Planck decorre da chamada radiação cósmica de fundo, descoberta em 1965 por A. Penzias e R. Wilson. Essa é uma radiação isotrópica, na faixa de micro-ondas, que permeia todo o espaço e, acredita-se, originou-se no início da formação de nosso Universo, com o *Big Bang*, ocorrido há cerca de 15 bilhões de anos, envolvendo a radiação e algumas partículas elementares [3].

A distribuição espectral dessa radiação foi ajustada à lei de Planck, a partir de dados do satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*), em 1989, e corresponde à temperatura de 2,73 K.

Outra possibilidade interessante é utilizar a lei de Planck, generalizada para um espaço a  $d$  dimensões,

$$u_\nu = \frac{2(d-1)\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \left(\frac{\nu}{c}\right)^d \frac{h}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (21)$$

para estabelecer um limite à dimensionalidade do espaço.

Em 2008, F. Caruso e V. Oguri [4] fizeram um ajuste dos dados do COBE à lei de Planck em  $d$  dimensões (Eq. 21). O resultado é mostrado na Fig. 15 e corresponde ao valor  $(d-3) = -(0,957 \pm 0,006) \times 10^{-5}$ .

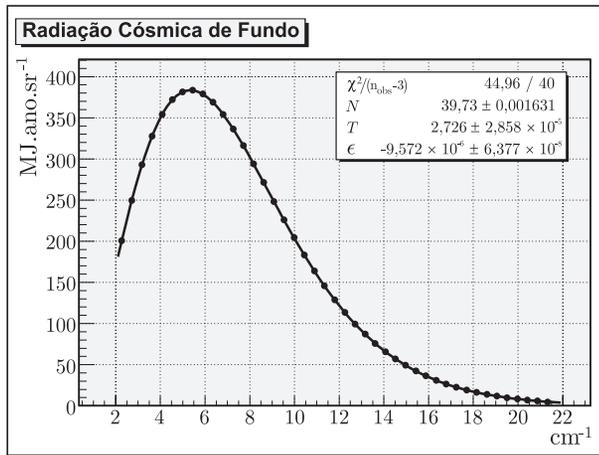


Figura 15: Espectro da radiação cósmica de fundo. Os pontos são dados do COBE e a linha contínua é um ajuste à lei de Planck em  $d$  dimensões.

## 6. EINSTEIN E A QUANTIZAÇÃO DA LUZ

O conceito de fóton surge quando Einstein, em 1905, mostra que a existência de um valor mínimo de energia, *quantum*, que pode ser absorvida por um oscilador em equilíbrio térmico com a radiação eletromagnética, pode ser atribuída à própria natureza da radiação.

Einstein, utilizando também a entropia de Boltzmann, argumenta que, se o volume  $V$  ocupado por um gás ideal com  $N$  partículas, em equilíbrio térmico, for dividido em regiões de volume  $V_0$ , o número de estados acessíveis a uma única partícula do gás é proporcional a  $V/V_0$ . Para  $N$  partículas independentes, o número total ( $G$ ) desses microestados é proporcional a

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^N$$

Desse modo, em uma transformação isotérmica, na qual a energia é constante, a variação da entropia de um gás ideal correspondente a uma variação de volume ( $V_2 - V_1$ ) é dada por

$$\Delta S = Nk \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (22)$$

em que  $V_2$  e  $V_1$  são os volumes final e inicial do gás.

Considerando que no limite de altas frequências a densidade espectral de energia da radiação de corpo negro é dada pela lei de Wien, equação 14, Einstein mostra também que para uma variação de volume ( $V_2 - V_1$ ) com energia constante  $U$ , a variação de entropia da componente de frequência  $\nu$  da radiação é dada por

$$\Delta S = \left(\frac{U}{h\nu}\right) k \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (23)$$

Comparando as equações (22) e (23), Einstein concluiu que a componente de frequência  $\nu$  da radiação eletromagnética de um corpo negro comporta-se como um gás ideal de partículas com energia  $h\nu$ . Ou seja, estabelece, pela primeira vez, a chamada quantização do campo eletromagnético ou da luz.

Assim, Einstein foi levado à conclusão de que a luz monocromática de frequência  $\nu$  seria constituída de corpúsculos de energia igual a  $h\nu$ , ou seja, estabelece uma volta à visão corpuscular da luz, considerada como um feixe de partículas.

Em 1924, baseando-se nos trabalhos do indiano S. Bose, Einstein apresenta as bases para uma abordagem estatística de gases constituídos de partículas indistinguíveis que pudessem compartilhar os mesmos estados quânticos, como os fótons. A partir de então, essas partículas, que têm sempre *spin* inteiro, são conhecidas genericamente como *bósons*.

### 6.1. O efeito fotoelétrico

A quantização da luz permitiu a Einstein explicar alguns fenômenos peculiares resultantes da interação da luz com a matéria.

Um deles, o chamado efeito fotoelétrico, consiste na liberação de elétrons pela superfície de um metal, após a absorção da energia proveniente da radiação eletromagnética incidente sobre ele, de tal modo que a energia total da radiação é parcialmente transformada em energia cinética dos elétrons expelidos. Esse fenômeno foi observado pela primeira vez em 1887, pelo alemão H. Hertz, e extensivamente estudado pelo também alemão P. Lenard, em 1902.

Nos experimentos realizados, um fotocátodo é iluminado por um feixe de luz monocromática, liberando elétrons, e a corrente  $I$  resultante é, em seguida, anulada ajustando-se um potencial retardador até um valor de corte  $V$ .

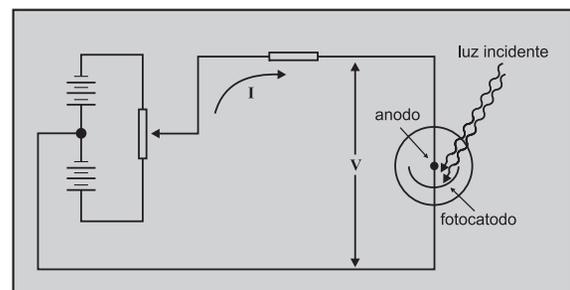


Figura 16: Esquema de um circuito para observação do efeito fotoelétrico.

Os principais resultados das observações de Lenard podem ser assim resumidos:

- a ocorrência da emissão de elétrons não depende da intensidade da luz incidente;
- a ocorrência da emissão depende da frequência da luz, mas para cada metal há um limite inferior;
- o valor de corte do potencial retardador cresce com a frequência da luz.

Os resultados de Lenard foram explicados por Einstein admitindo que a luz de frequência  $\nu$ , em sua interação com a matéria, fosse constituída por *quanta* de energia  $\varepsilon = h\nu$ . Ao penetrar na superfície do metal, cada fóton interage com um elétron, transmitindo-lhe toda a sua energia. Entretanto, para um elétron abandonar a superfície do metal, é necessário que a energia adquirida por ele seja maior que um certo valor  $\phi$ , denominado *função trabalho* do metal, ou seja, os elétrons só conseguem abandonar o metal se  $h\nu > \phi$ . A diferença

$$eV = h\nu - \phi \quad (24)$$

é igual a energia cinética máxima dos elétrons que escapam, a qual é igual ao valor de corte  $V$  do potencial necessário para deter o fluxo de elétrons.

Em 1914, o físico norte-americano Robert Millikan estabeleceu de forma definitiva a expressão linear proposta por Einstein e a utilizou para determinar a constante de Planck.

## 6.2. O efeito Compton

Os fótons só seriam definitivamente estabelecidos em 1922, quando o físico norte-americano Arthur Compton mostra que a cinemática do espalhamento da radiação de curtíssimo comprimento de onda (na região de raios X) que ele fazia incidir sobre um alvo de grafite podia ser explicada a partir da colisão fóton-elétron [2].

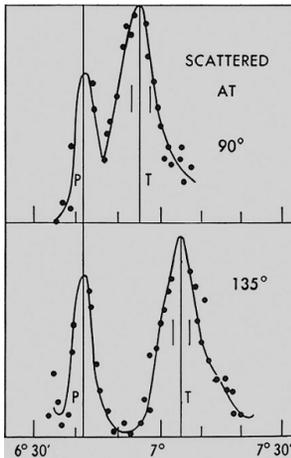


Figura 17: Espectro da radiação (raios X) espalhada por um alvo de grafite.

Os espectros da radiação espalhada por um alvo de grafite, levantados experimentalmente por Compton, são mostrados na Fig. 17. De acordo com a teoria de espalhamento de Thomson para raios X, o comprimento de onda da radiação espalhada em uma direção qualquer deve ser igual ao da radiação incidente.

Para cada ângulo de espalhamento  $\theta$ , a Fig. 17 mostra, além de um pico com comprimento de onda  $\lambda$  igual ao da radiação incidente, um segundo pico, relativo a um comprimento de onda  $\lambda'$  maior que o da radiação incidente. A relação entre  $\lambda'$  e  $\lambda$  depende do ângulo  $\theta$  entre a direção da

radiação espalhada e a direção da incidente, e é dada pela fórmula de Compton,

$$\lambda' = \lambda + A \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (25)$$

Esse resultado foi obtido por Compton supondo que os aspectos cinemáticos do espalhamento de raios X pela matéria pudessem ser descritos pela colisão entre um fóton e um elétron (Fig. 18), à qual se aplica a conservação de energia e *momentum*, segundo a teoria da relatividade restrita. Como a energia dos fótons de um feixe de raios X é muito maior que a energia de movimento dos elétrons nos átomos, pode-se considerá-los, inicialmente, em repouso.

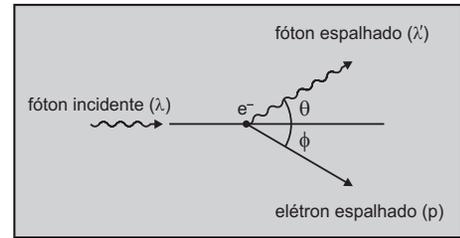


Figura 18: Colisão de um fóton com um elétron, inicialmente em repouso.

A ideia de se associar, além da energia, um *momentum* ao fóton já tinha sido considerada por Einstein, mas é com Compton que o conceito de fóton como partícula é integralmente estabelecido. Segundo ele, deve-se admitir que um fóton ( $\gamma$ ), associado à radiação monocromática de frequência  $\nu$ , que se propaga na direção  $\hat{k}$ , comporta-se como uma partícula de massa nula que se move à velocidade ( $c$ ) da luz no vácuo, tal que:

- $\varepsilon_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$  (energia)
- $\vec{p}_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma}{c} \hat{k}$  (*momentum*)

Se  $(\varepsilon_\gamma, \varepsilon_0)$  e  $(\varepsilon'_\gamma, \varepsilon)$  são, respectivamente, as energias do fóton e do elétron, antes e depois da colisão,

$$\begin{cases} \varepsilon_\gamma = p_\gamma c \\ \varepsilon_0 = mc^2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \varepsilon'_\gamma = p'_\gamma c \\ \varepsilon^2 = (p c)^2 + (mc^2)^2 \end{cases}$$

Logo, as leis de conservação de energia e *momentum* são expressas como

$$\begin{cases} \varepsilon_\gamma + mc^2 = \varepsilon'_\gamma + \varepsilon \\ \vec{p}_\gamma = \vec{p}'_\gamma + \vec{p} \end{cases}$$

Da conservação de energia, segue-se que a energia do elétron pode ser expressa também por

$$\varepsilon^2 = (\varepsilon_\gamma - \varepsilon'_\gamma + mc^2)^2 = (\varepsilon_\gamma - \varepsilon'_\gamma)^2 + 2(\varepsilon_\gamma - \varepsilon'_\gamma)mc^2 + m^2c^4$$

a qual é equivalente a

$$\underbrace{\varepsilon^2 - m^2 c^4}_{p^2 c^2} = \varepsilon_\gamma^2 + \varepsilon_\gamma'^2 - 2\varepsilon_\gamma \varepsilon_\gamma' + 2(\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\gamma') mc^2 \quad (26)$$

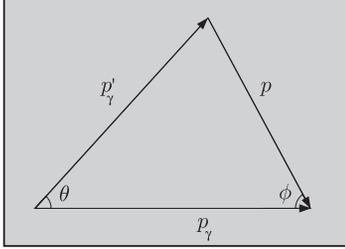


Figura 19: Diagrama de conservação do *momentum* para o efeito Compton.

Da conservação de *momentum*, de acordo com a figura 19, pode-se escrever

$$p^2 = p_\gamma'^2 + p_\gamma^2 - 2p_\gamma' p_\gamma \cos \theta$$

e, tendo em conta que  $p_\gamma = \varepsilon_\gamma/c$  e  $p_\gamma' = \varepsilon_\gamma'/c$ , obtém-se

$$p^2 c^2 = \varepsilon_\gamma^2 + \varepsilon_\gamma'^2 - 2\varepsilon_\gamma \varepsilon_\gamma' \cos \theta \quad (27)$$

Igualando-se as equações (26) e (27), resulta

$$(\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\gamma') mc^2 = \varepsilon_\gamma \varepsilon_\gamma' (1 - \cos \theta) \quad (28)$$

ou seja,

$$\frac{1}{\varepsilon_\gamma'} - \frac{1}{\varepsilon_\gamma} = \frac{1}{mc^2} (1 - \cos \theta)$$

Uma vez que  $\varepsilon_\gamma = hc/\lambda$  e  $\varepsilon_\gamma' = hc/\lambda'$ , chega-se à relação de Compton

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) = \left( \frac{2h}{mc} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (29)$$

Apesar de o conceito de fóton ter tido origem no espectro do corpo negro, foi o efeito Compton que exibiu a evidência experimental que convenceu a maioria da comunidade científica, nos anos de 1920, a aceitar a existência do fóton como uma das partículas elementares da natureza.

- [1] F. Caruso & V. Oguri, 2016, *Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos*. Rio de Janeiro: LTC Editora, segunda edição.
- [2] M.H. Shamos, 1987, *Great Experiments in Physics*. New York: Dover Pub. Inc.
- [3] F. Caruso, V. Oguri & A. Santoro, 2012, *Partículas Elemen-*

*tares: 100 Anos de Descobertas*. São Paulo: Editora Livraria da Física, segunda edição.

- [4] F. Caruso & V. Oguri, 2009, The Cosmic Microwave Background Spectrum and an Upper Limit for Fractal Space Dimensionality. *The Astrophysical Journal* **694**, p. 151-153.